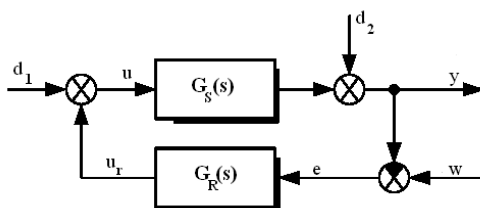


Prof. Ing. Miroslav Olehla, CSc.
Ing. Slavomír Němeček
Doc. Ing. Ivan Švarc, CSc.

AUTOMATICKÉ ŘÍZENÍ



© Prof. Ing. Miroslav Olehla, CSc., TU Liberec
Ing. Slavomír Němeček, TU Liberec
Doc. Ing. Ivan Švarc, CSc., VUT Brno

Lektoroval: Prof. Ing. Jan Skalla, CSc.

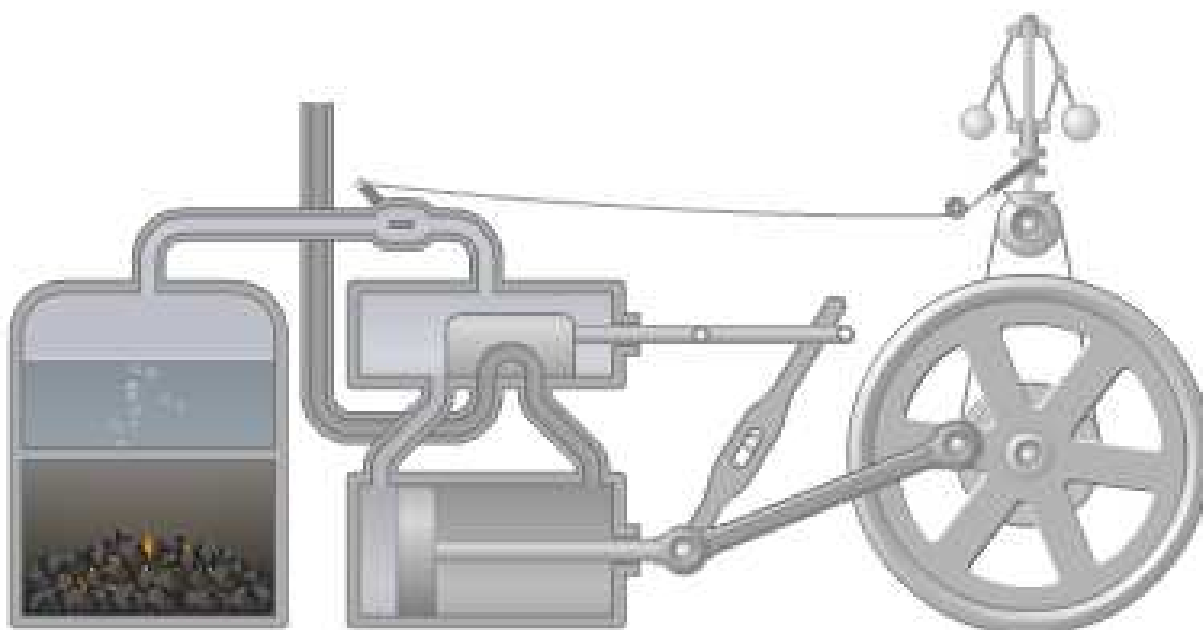
ISBN 978-80-7372-732-1

1. ÚVOD	6
1.1 <i>SYSTÉMY A MODELÝ</i>	7
1.1.1 <i>Základní pojmy teorie systémů</i>	7
1.2 <i>INFORMACE, SIGNÁL A KÓD</i>	8
2. AUTOMATICKÉ ŘÍZENÍ	9
2.1 <i>MECHANIZACE, AUTOMATIZACE, ŘÍZENÍ</i>	9
2.2 <i>STATICÁ A DYNAMICKÁ CHARAKTERISTIKA</i>	12
2.3 <i>POPIS ČLENŮ REGULAČNÍCH OBVODŮ</i>	12
2.4 <i>LINEARIZACE</i>	14
2.4.1 <i>Linearizace tečnou v pracovním bodě</i>	14
2.5 <i>ANALÝZA AUTOMATICKÝCH REGULAČNÍCH OBVODŮ</i>	15
2.5.1 <i>Klasické řešení</i>	15
2.5.2 <i>Řešení pomocí Laplaceovy transformace</i>	16
2.5.3 <i>Zpětná Laplaceova transformace</i>	17
2.5.4 <i>Základní vlastnosti Laplaceovy transformace</i>	18
2.6 <i>HEAVISIDEŮV ROZVOJ</i>	18
2.6.1 <i>Rozklad do parciálních zlomků – řešení použitím Heavisideova rozvoje</i>	20
2.6.2 <i>Určení kořenů algebraických rovnic</i>	24
2.7 <i>ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC POMOCÍ SIMULAČNÍCH PROGRAMŮ</i>	27
2.7.1 <i>Metoda snižování řádu</i>	27
2.7.2 <i>Metoda postupné integrace</i>	28
2.8 <i>NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC</i>	29
2.9 <i>ŘEŠENÍ V PROSTŘEDÍ MATLAB/SIMULINK</i>	29
3. POPIS DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ SYSTÉMU	32
3.1 <i>VNĚJŠÍ POPIS SYSTÉMU</i>	32
3.1.1 <i>Přenos systému</i>	32
3.1.2 <i>Přechodová funkce</i>	34
3.1.3 <i>Určení souřadnic přechodové charakteristiky měřením</i>	35
3.1.4 <i>Impulzní funkce a impulzní charakteristika</i>	36
3.1.5 <i>Určení souřadnic impulzní charakteristiky měřením</i>	37
3.1.6 <i>Frekvenční přenos</i>	37
3.1.7 <i>Frekvenční charakteristika</i>	38
3.1.8 <i>Určení frekvenční charakteristiky měřením</i>	40
3.1.9 <i>Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích</i>	42
3.1.10 <i>Poloha pólů a nul přenosu</i>	46
3.1.11 <i>Typové dynamické členy regulačních obvodů</i>	47
4. BLOKOVÁ ALGEBRA	49
5. REGULOVANÁ SOUSTAVA	52
5.1 <i>REGULOVANÉ SOUSTAVY</i>	52
5.1.1 <i>Proporcionální regulované soustavy</i>	53
5.1.2 <i>Integrační regulované soustavy</i>	57
5.1.3 <i>Regulované soustavy s neminimální fází</i>	59
5.1.4 <i>Regulované soustavy s dopravním zpožděním</i>	60
6. REGULÁTORY	63
6.1 <i>DYNAMICKÉ VLASTNOSTI SPOJITÝCH REGULÁTORŮ</i>	64
6.2 <i>STAVITELNÉ PARAMETRY REGULÁTORŮ</i>	68
6.2.1 <i>Význam zpětné vazby u spojitéch regulátorů</i>	69
6.2.2 <i>Charakteristika činnosti spojitéch regulátorů</i>	70
6.2.3 <i>Interakce konstant regulátorů</i>	73

7.	NESPOJITÉ REGULÁTORY	74
7.1	DVOUPOLOHOVÝ REGULÁTOR.....	74
7.2	REGULAČNÍ OBVOD	75
7.3	OPATŘENÍ PRO ZKVALITNĚNÍ REGULAČNÍCH POCHODŮ ŘÍZENÝCH NESPOJITÝMI REGULÁTORY	78
8.	REGULAČNÍ OBVOD	80
8.1	PŘENOS REGULAČNÍHO OBVODU	80
8.2	STABILITA REGULAČNÍHO OBVODU	84
8.3	KRITÉRIA STABILITY	88
8.3.1	Algebraická kritéria stability	88
9.	SEŘÍZENÍ REGULÁTORU	93
9.1	METODA KRITICKÉHO ZESÍLENÍ REGULÁTORU (METODA ZIEGLER-NICHOLSOVA).....	93
9.2	SEŘÍZENÍ REGULÁTORU PID METODOU KRITICKÉHO ZESÍLENÍ.....	94
9.3	SEŘÍZENÍ REGULÁTORU NA ZÁKLADĚ ZNALOSTI PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY REGULOVANÉ SOUSTAVY	99
9.4	KRITÉRIUM JAKOSTI REGULACE PODLE FUNKCIONÁLU ODCHYLKY (INTEGRAČNÍ KRITÉRIA)	101
10.	ŘÍDÍCÍ ALGORITMY PSD	103
11.	SIMULINK	106
11.1	NÁVRH BLOKOVÉHO DIAGRAMU.....	109
11.2	VÝBĚR A KOPÍROVÁNÍ POŽADOVANÝCH BLOKŮ Z KNIHOVEN.....	109
11.3	PROPOJENÍ VSTUPŮ A VÝSTUPŮ	110
11.4	SUBSYSTÉM MOTORU V SIMULINKU :.....	113
12.	DISKRÉTNÍ ŘÍZENÍ	118
12.1	DISKRÉTNÍ REGULAČNÍ OBVOD	118
12.2	Z-TRANSFORMACE	121
12.2.1	Přímá transformace	121
12.2.2	Zpětná transformace	123
12.2.3	Vlastnosti Z-transformace.....	128
12.3	DIFERENČNÍ ROVNICE	129
12.3.1	Zavedení diferenčních rovnic a jejich řešení	129
12.3.2	Diskretizace spojitých systémů.....	134
12.4	MATEMATICKÝ POPIS DISKRÉTNÍCH ČLENŮ.....	138
12.4.1	Diferenční rovnice a Z-přenos	138
12.4.2	Impulsní funkce a charakteristika	140
12.4.3	Přechodová funkce a charakteristika.....	142
12.4.4	Frekvenční přenos a frekvenční charakteristika.....	145
12.4.5	Bloková algebra	147
12.5	ČÍSLICOVÉ REGULÁTORY.....	151
12.5.1	Algoritmus číslicových regulátorů.....	151
12.5.2	Souvislost mezi typy spojitých a diskrétních regulátorů.....	153
12.5.3	Technické problémy při nasazení PSD regulátorů	157
12.5.4	Seřízení číslicových regulátorů.....	159
12.6	METODA ZIEGLER-NICHOLSOVA A PODLE PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY SOUSTAVY.....	159
12.6.2	Metoda optimálního modulu (pro diskrétní regulátory).....	163
12.6.3	Realizace číslicových regulátorů	164
12.7	STABILITA DISKRÉTNÍCH OBVODŮ.....	165
12.7.1	Obecná podmínka stability.....	165
12.7.2	Kritéria stability.....	168
12.7.3	Bilineární transformace	171
13.	FUZZY ŘÍZENÍ	174

13.1	<i>FUZZY LOGIKA A FUZZY LOGICKÉ FUNKCE</i>	175
13.2	<i>FUZZY REGULÁTOR</i>	180
13.3	<i>VYUŽITÍ FUZZY REGULÁTORU</i>	185
14.	LITERATURA:	186
15.	PŘÍLOHA	187
15.1	<i>DEFINIČNÍ VZTAHY A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE</i>	187
15.2	<i>SLOVNÍK LAPLACEOVY TRANSFORMACE</i>	189

1



¹ <http://www.parnistroj.czweb.org/schema.html>

1. ÚVOD

Přechod výroby ze stadia mechanizace do stadia částečné či plné automatizace je doprovázen vznikem mimořádně složitých výrobních, energetických, dopravních i jiných systémů, jejichž řízení se stává velmi obtížným. Neumíme totiž stanovit všechny podmínky nutné pro realizaci řízení, protože neumíme vypočítat všechny možné stavy, určit všechna omezení a všechny vnější vlivy a proto nejsme schopni stanovit algoritmy řízení. Obtíže vznikají také tím, že některé informace potřebné pro řízení nelze zjistit, některé vlivy nelze měřit. Studovat vlastnosti těchto složitých systémů, s cílem jak je řídit, již nelze tradičním způsobem rozčleněním na jednodušší složky (podsystemy) nebo postupným oddělením sledováním působení jednoho činitele nebo vlivu na druhý. Metody jak studovat vlastnosti těchto systémů a jak je řídit nabízí nový vědní obor - kybernetika. Pojem kybernetika byl poprvé použit A. M. Ampérem² pro označení budoucí vědy o řízení lidské společnosti. Nezávisle na Ampérovi použil tento termín Norbert Wiener³ pro knihu, jejímž vydáním (1948) byla v podstatě založena nová vědní disciplína. Wiener definoval kybernetiku jako "vědu o řízení a sdělování v živých organismech a strojích". Kybernetika zkoumá podobnosti v chování živých organismů a složitých strojů a určuje obecné zákonitosti řízení systémů se složitou vnitřní strukturou. Pro toto zkoumání je základním hlediskem přenos informace a ponechává se stranou hledisko energetické, které se používá při studiu fyzikální podstaty chování systému. Kybernetika řeší proto otázky jak se chovají různé systémy a nezajímá se o to proč se tak chovají.

Pojem informace je ústředním pojmem kybernetiky. Kvantitativní obsah dostane tento pojem jen na základě statistického přístupu, který je charakteristickým rysem kybernetiky. Informaci dovedeme vyjádřit jen pomocí pravděpodobnostní míry - entropie. Dalšími důležitými pojmy kybernetiky je řízení a zpětná vazba, které byly používány již dříve ve sdělovací a regulační technice. Kybernetika však ukázala jejich obecný význam nejen v technických zařízeních, ale i v živé přírodě. S rozvojem kybernetiky je úzce spojeno používání různých funkčních modelů v souvislosti s rozvojem počítačů.

Předmětem zkoumání kybernetiky jsou především složitě systémy. Předně jsou to systémy živé přírody, pro které kybernetika nabízí metody směřující k objasnění některých chování souvisejících i s mozkovou činností člověka. Do systémů živé přírody lze zahrnout i systémy dané vzájemnými vztahy mezi lidmi nebo mezi lidmi a stroji a tedy metod kybernetiky lze využít i v ekonomii, sociologii, psychologii, lékařských vědách apod. Složitě stroje nebo zařízení nebo technologické procesy, u nichž sledujeme jak na sebe vzájemně působí jejich jednotlivé části a jaké zákonitosti platí pro jejich řízení, označujeme jako technické systémy a jejich problémy řeší technická kybernetika. Za třetí základní typ systémů můžeme považovat abstraktní systémy, které jsou vlastně matematickými modely předchozích, možno říci reálných systémů. Význam těchto abstraktních systémů je v tom, že jejich přesný matematický popis i přesné definice používaných pojmů umožňují vyšetřovat jejich vlastnosti exaktními matematickými prostředky a z toho vyvozovat závěry o chování reálných systémů. Zkoumání matematických modelů a způsobu přenosu informace v systémech živé přírody umožnilo rozvoj kybernetických systémů uměle vytvořených člověkem, které jsou schopny rozpoznávat a klasifikovat předměty, situace a jevy, analyzovat scény, přizpůsobovat svoje chování měnícím se podmínkám v nichž pracují (adaptovat se) a dokonce vykazovat jisté schopnosti učit se. To se stává základem pro výzkum a vývoj robotů vyšších generací schopných zpracovávat optické, akustické i další informace o prostředí a podle globálně zadaných cílů plnit určité úkoly. Vývoj směřuje k pokusům realizovat i tzv. umělou inteligenci, kterou by byly vybavovány řídicí systémy pro náročné úkoly.

Kybernetika je dnes již všeobecně uznávána jako jedna ze základních teoretických disciplín všech oborů, které se zabývají sdělovací technikou, automatickou regulací a řízením technologických procesů, závodů i průmyslových odvětví i řídicími pochody ve složitých systémech biologických.

²A.M.Ampérem. Francouzský matematik, (1775-1836). Zabýval se filozofií a tříděním věd, studoval matematiku, chemii i botaniku. Pro vědu o procesech řízení zavedl název kybernetika. Rychle se stával uznávaným vědcem. Ve třinácti letech znal základy třinácti jazyků. Ampére jako první odlišil pojmy elektrické napětí a elektrický proud. Pomocí známého pravidla pravé ruky určil směr orientace indukčních čar a zformuloval zákon síly působící mezi elektrickými proudy. Ampérov spis *Teorie elektromagnetických jevů* odvozená výhradně na základě pokusů se stal základem nové oblasti fyziky - elektrodynamiky.

³Norbert Wiener. Americký matematik, (1894 – 1964), je považován za zakladatele kybernetiky. Toto slovo použil ve své knize *Kybernetika aneb Řízení a sdělování u organismů a strojů*. Ve třinácti letech obdržel bakalářský titul a nastoupil na Harvard. Náplní jeho práce byl Brownův pohyb, Fourierův integrál, Dirichletovy problémy, harmonická analýza, Tauberianovy teorémy a další problémy. Během druhé světové války vybudoval teorii predikce stacionárních časových řad a použil ji pro řízení protiletadlového dělostřelectva.

1.1 Systémy a modely

1.1.1 Základní pojmy teorie systémů

Při našem poznávání můžeme podrobit vědeckému zkoumání veškerou objektivní realitu. Z důvodů, které se nám zdají intuitivně jasné a které mají však hluboké fyzikální opodstatnění je našemu zkoumání přístupná v každém okamžiku vždy pouze jistá část objektivní reality. Tuto část nazveme objekt, vše ostatní nazveme okolím.

Příkladem objektů mohou být: spalovací motor, lidský mozek, počasí v určitém časovém intervalu, nervová buňka, elektromotor, číslicový počítač atd.

Hranice mezi objektem a okolím nemůžeme vždy stanovit přesně (např. počasí nad daným územím může být ovlivňováno atmosférickými ději na opačné části zeměkoule apod.).

Objekt samotný můžeme vyšetřovat z různých hledisek. Na zvoleném objektu pozorujeme nebo měříme hodnoty určitých veličin. Výběr veličin nebo vlastností závisí na tom, co považujeme na daném objektu za zajímavé nebo co považujeme za významné vzhledem k danému účelu. Vyšetřujeme-li např. energetickou účinnost motoru, bude nás málo zajímat, jakou má motor barvu nebo tvar. Naproti tomu průmyslového návrháře tvarujícího nějaký stroj, bude velmi málo zajímat účinnost motoru, ale barva a tvar pro něho budou rozhodující. Jakmile jsme se soustředili na vlastnosti pro nás podstatné a odhlédli od vlastností pro nás nepodstatných, říkáme, že na daném objektu definujeme systém z jistého hlediska. Jak říká jeden ze zakladatelů kybernetiky W. R. Ashby⁴, každý materiální objekt obsahuje nekonečné množství proměnných a je na něm možno definovat nekonečné množství systémů.

Popsaným způsobem definujeme systém v experimentálních disciplínách jako je fyzika, chemie, ekonomie, biologie atd., kde hlavním cílem je poznat přírodní zákony.

Stejným způsobem definujeme systém v technických disciplínách, ale úkol je zpravidla obrácený. Vztahy mezi veličinami systému jsou známy, ale k systému je třeba nalézt objekt - návrh, konstrukce, syntéza.

Poněkud jiná situace je v abstraktních disciplínách jako je matematika, logika, lingvistika a pod. Tam je systém definován výčtem proměnných, jejich přípustných hodnot a jejich algebraických, topologických a dalších vlastností, které determinují vztahy mezi uvažovanými veličinami.

Přesnost a frekvence, s jakou zaznamenáváme vyšetřované veličiny, určuje časoprostorovou rozlišovací úroveň, častěji říkáme jen rozlišovací úroveň. Soubor všech možných hodnot sledovaných veličin po dobu zkoumání systému nazýváme aktivitou systému. Na základě pozorování aktivity systému se snažíme nalézt vztahy mezi jednotlivými veličinami, které platí po celou dobu zjišťování aktivity, tj. časově invariantní vztahy.

Veličiny přicházející z okolí systému, a které jsou příčinou jevů nastávajících v systému, jsou veličiny, které nezávisí na vlastnostech systému a nazýváme je proto nezávislé veličiny. Veličiny produkované systémem, tj. odvozené z vlastností systému a z nezávislých veličin, označujeme jako závislé veličiny. Je-li separace veličin dána předem (s tím se setkáváme zejména u technických systémů), pak nezávislé veličiny nazýváme vstupními veličinami. Vstupní veličiny nazýváme také řídícími veličinami. Systémy u nichž známe vstupní nebo řídící veličiny, nazýváme řízenými systémy. Ostatní systémy nazýváme neřízenými, volnými nebo neutrálními systémy.

V kybernetice se budeme setkávat převážně s řízenými systémy (např. filtr, regulační obvod, konečný automat atd.). S neutrálními systémy se setkáváme v jiných disciplínách (např. systémy jako sluneční soustava, harmonický oscilátor apod.).

Podle druhu veličin dělíme systémy na fyzikální, jejichž veličiny jsou měřitelné a ostatní, které zahrnujeme do kategorie systémů abstraktních.

Podle počtu veličin rozeznáváme systémy ohraničené, které mají konečný počet veličin a konečnou strukturu a systémy neohraničené (všechny ostatní).

Z hlediska interakce s okolím dělíme systémy na systémy uzavřené, u nichž nedochází k interakci s okolím a systémy otevřené (ostatní).

Podle průběhu veličin v čase můžeme dělit systémy na spojité, jejichž veličiny se mění v čase spojitě a diskrétní, jejichž veličiny jsou známy pouze v diskrétních časových okamžicích a (nebo) nabývají konečného počtu diskrétních hodnot.

Podle toho, zda časově invariantní vztahy u systému jsou charakteru deterministického nebo pravděpodobnostního, dělíme systémy na deterministické a stochastické. Podle toho, jestli výstupní veličiny

⁴ William Ross Ashby (1903-1972) anglický neurolog a psychiatr sestavil elektromechanický a později elektronický model homeopatických pochodů.

u řízených systémů záleží pouze na okamžitém stavu nebo na historii systému, dělíme řízené systémy na systémy statické (kombinační, bez paměti) a dynamické (sekvenční, s pamětí).

Problém definice systému na objektu a vztahu mezi systémem a objektem je stěžejním problémem mnoha technických disciplín. Projevuje se v tom, že „teoretik“, který pracuje se systémy se stále tíže dorozumí s „praktikem“, pracujícím s konkrétními objekty.

Takto zavedený pojem systému nám umožňuje pochopit rozpory mezi teorií (výpovědi o abstraktním systému) a praxí (experimentální data zjištěná na fyzikálním systému). Jestliže u složitějších elektronických nebo regulačních obvodů rozdíl mezi vypočtenými a naměřenými hodnotami dosahují desítek až stovek procent, nemusí to znamenat, že buď teorie nebo měření jsou nesprávná.

Studium zákonitostí pohybu kybernetických systémů a jejich zobecnění vedlo ke vzniku základních disciplín teoretické kybernetiky.

- 1) teorie systémů
- 2) teorie řízení
- 3) teorie informace
- 4) teorie her a rozhodování
- 5) teorie algoritmů
- 6) teorie programování

Analýza, syntéza, identifikace a simulace

Předmětem analýzy je vyšetřování chování daného existujícího systému, tedy určení odezvy na zvolený vstup a určení stability. Je tedy dán systém a vstupní veličina a hledáme průběh výstupní veličiny.

Syntéza umožňuje provedení návrhu vhodné struktury (optimální) nového systému (případně úpravu struktury) za účelem dosažení požadovaného chování. Je tedy dán průběh vstupní a výstupní veličiny a provádíme návrh systému (parametrů a celkovou koncepci).

Identifikace je určení dynamických vlastností systému. Existují dva možné přístupy

- analytický (matematicko-fyzikální analýza) a
- experimentální (předpokládá provozní měření vstupů a výstupů).

Simulace značí určení chování systému na jiném zařízení, například na počítači.

1.2 Informace, signál a kód

V kybernetických systémech jsou jednotlivé prvky systému propojeny vazbami a také systémy navzájem mohou být ve vzájemných vazbách. Tyto vazby zajišťují přenos energie, hmoty a mnoha dalších fyzikálních veličin. Z hlediska kybernetiky není důležité, pomocí kterých fyzikálních veličin jsou tyto vazby realizovány. Rozhodující je, jaké informace jsou přenášeny těmito veličinami a jakým způsobem mohou být využity k řízení. Pod systémem si můžeme představit např. telefonní linku, termostat udržující teplotu v místnosti, nebo zařízení pro rozpoznávání symbolů (písmen). Přesto, že se principiálně jedná o stejné úlohy, mluvíme v prvním případě o sdělování, ve druhém o řízení a ve třetím o rozpoznávání. Ve všech případech jde o nějakou formu přenosu, zapamatování nebo klasifikaci.

Nositelem informací jsou různé fyzikální veličiny. Pro všechny tyto veličiny, které jsou materiálním nosičem informací používáme název signál. Signál je tedy fyzikální veličina, která nese informaci a slouží pro účely přenosu, záznamu a transformaci informace. Signály dělíme na spojité a diskrétní.

Způsobu přiřazení mezi významem informace a signálem říkáme kód. Příkladem kódování může být převod z dekadické soustavy do binární.

Obecný komunikační kanál se skládá ze

- zdroje informací
- kódovacího zařízení
- přenosového kanálu (včetně rušení)
- dekódovacího zařízení
- příjmu informace.

Zdrojem informace může být člověk, snímač měřícího zařízení, atd. Úkolem kódovacího zařízení je přenést zprávu generovanou zdrojem informací na signál takové fyzikální veličiny, který se nejlépe přenáší přenosovým kanálem, např. mikrofon přenášející akustické kmity na kmity elektrické. Přenosový kanál je tvořen prostředím, kterým se signál přenáší, např. telefonní vedení, akustické vlnění. Přenosový kanál vždy nějakým způsobem přenášený signál zkresluje a k signálu se přidávají různé poruchy. Dekódovací zařízení převede přenášený signál na signál takové fyzikální podstaty, aby byl srozumitelný příjemci.

2. Automatické řízení

2.1 Mechanizace, automatizace, řízení

Mechanizace je proces, při němž výrobními prostředky či úpravou technologického postupu odstraňujeme fyzickou práci. Činnost člověka se přesouvá do oblasti řízení a kontroly.

Automatizace je proces, při němž řídicí funkce přebírají různé stroje a zařízení. K zabezpečení automatizace je tedy nutné zvládnout řízení daného objektu.

Řízení je cílevědomá činnost, při níž se hodnotí a zpracovávají informace o řízeném procesu a podle nich se ovládají příslušná zařízení tak, aby se dosáhlo určitého předepsaného cíle. Je tedy zavedena zpětná vazba. Při řízení, kdy se nesrovnává bezprostřední účinek řízení s očekávaným výsledkem se proces řízení nazývá ovládání. U ovládání není tedy použito zpětné vazby.

Důležitým hlediskem pro dělení řízení je zda výsledek řízení je nebo není zpětně kontrolován – zda je nebo není použita zpětná vazba. Podle toho rozlišujeme řízení na:

-ovládání (bez zpětné kontroly – bez zpětné vazby)

-regulaci (je řízení se zpětnou vazbou, regulací je udržována regulovaná veličina na konstantní hodnotě nebo podle nějakého pravidla se měnící hodnotě. Během regulace se zjišťují hodnoty regulované veličiny a srovnávají se s hodnotou, která je požadována. Podle zjištěné odchylky se zasahuje do regulačního procesu tak, aby se odchylka odstranila.

-vyšší formy řízení - optimální řízení (systém dosáhne požadovaných vlastností například s minimální energií, v nejkratším čase atd. Systém je schopen vyhledat nejhodnější působení a dosáhnout tak co nejlepšího chování celého systému a daných omezujících podmínkách)

-adaptivní řízení (systém je schopen měnit svou strukturu, tedy své parametry tak, aby proces řízení probíhal stále optimálně a to i při změnách parametrů řízeného objektu).

-učící se systémy adaptivní systém je schopen ukládat přijaté informace do paměti a později v téže podobě nebo podobné situaci znovu využívat získaných zkušeností. Proces řízení tohoto systému je učení).

-umělá inteligence (je nejvyšším stupněm řízení. Umělá inteligence je vlastnost uměle vytvořeného systému, který má schopnost rozpoznávat předměty, jevy, analyzovat vztahy mezi nimi a tak si vytvářet modely okolí, dělat účelná rozhodnutí a předvídat jejich důsledky).

Automatické řízení rozlišujeme dále na přímé řízení, u kterého řídicí proces probíhá bez přívodu energie (například regulace výšky hladiny využívá jen sílu od plováku) a nepřímé řízení s přívodem energie, kdy signál od snímače není dostatečný (například manipulace s velkým ventilem).

Automatické řízení lze uskutečnit několika způsoby:

-logické řízení využívá k řízení dvouhodnotových veličin. Jejich působení je takové, že využívá jen dvou možností a jsou formálně vyjadřovány hodnotami 0 a 1.

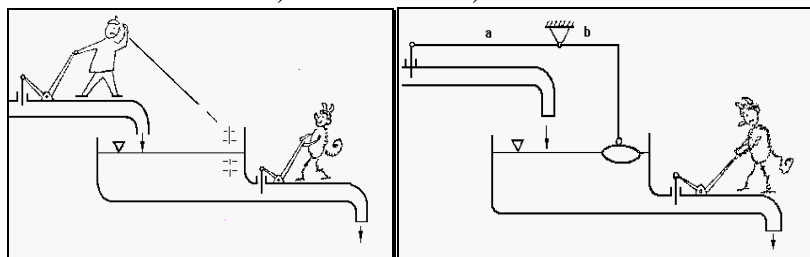
-spojité řízení, akční zásah je nastavován spojitě, rovněž údaje o řízeném systému jsou měřeny jako veličiny spojitě proměnné v čase.

-diskrétní, kde je spojitý systém převáděn na diskrétní. Diskrétní řídicí systém vytváří vztah mezi vstupem a výstupem jako vztah mezi posloupností impulsů, snímaných v časovém sledu daném periodou vzorkování.

-nespojité regulátory jsou takové, u kterých výstupní signál nezávisí spojitě na vstupním signálu. Nejjednodušším nespojitým regulátorem je dvoupolohový regulátor.

-fuzzy řízení je vhodné pro řízení systémů, které nedovedeme popsat, ale dovedeme řídit, tedy určit hodnotu výstupu aniž známe vzorec mezi vstupem a výstupem,.

Řízení je dále možno rozdělit na: a) ruční řízení a b) automatické řízení

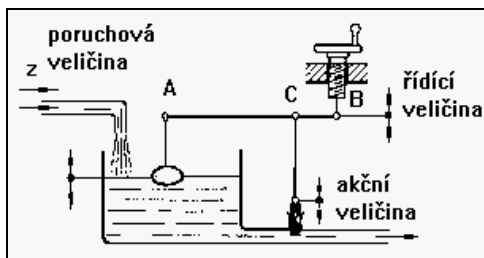


Obr. 2.1 Ruční a automatické řízení

Ruční řízení je realizováno člověkem, sledujícím výšku hladiny v nádrži podle dané stupnice s danou hodnotou požadované výšky hladiny. Podle toho, zda výška stoupá nebo klesá, otvírá či zavírá šoupátka pro přísun vody do nádrže a tím vyrovnává výšku hladiny v nádrži.

Automatické řízení lze snadno realizovat pomocí plováku a páky na pevném čepu. Klesá-li hladina v nádrži, klesá i plovák, který pomocí páky otvírá šoupátko na vstupu. Stoupne-li hladina, zvedne se i plovák, který šoupátko uzavírá.

U obou případů je zřejmý účinek zpětné vazby, realizované člověkem nebo plovákem, který působí proti poruše a je označován jako záporná zpětná vazba. Obdobným případem automatického řízení je příklad na následujícím obrázku



Obr. 2.2 Regulace výšky hladiny přímým regulátorem

Veličina, která se regulací udržuje v předepsaných podmínkách se nazývá regulovaná veličina (výška hladiny) a ta může nabývat různých hodnot.

Skutečná hodnota regulované veličiny je hodnota, kterou regulovaná veličina v daném okamžiku má. Skutečná hodnota je v našem případě měřena plovákem. Předepsaná velikost, na které se má regulovaná veličina udržovat se nazývá žádaná hodnota. Tato žádaná hodnota se zavádí do regulačního obvodu řídící veličinou (posuv šroubu ručním kolečkem).

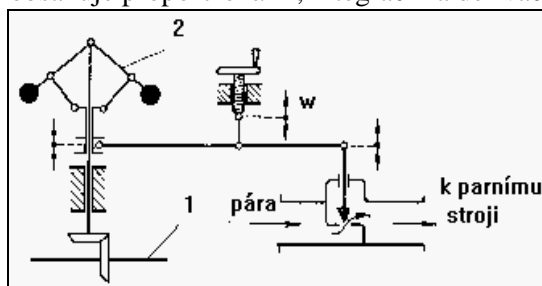
Skutečnou hodnotu regulované veličiny a žádanou hodnotu regulované veličiny je nutno neustále vzájemně srovnávat a vytvářet jejich rozdíl - regulační odchylku. Toto se uskutečňuje v součtovém (rozdílovém) porovnávacím členu (páka AB pro náš případ).

Měřicí člen je člen pro získání a převod informace tj. skutečné hodnoty regulované veličiny (plovák). Skládá se snímače (čidla) a převáděcího členu, který převádí signál na jinou fyzikální veličinu, vhodnou k dalšímu zpracování (převodník).

Do regulovaného procesu je třeba zasahovat tak, aby tato regulační odchylka byla udržována na své minimální resp. nulové hodnotě. Toho se dosáhne působením akční veličiny (otvíráním či zavíráním regulačního ventilu). Za akční veličinu lze však v našem případě uvažovat změnu polohy regulačního ventilu.

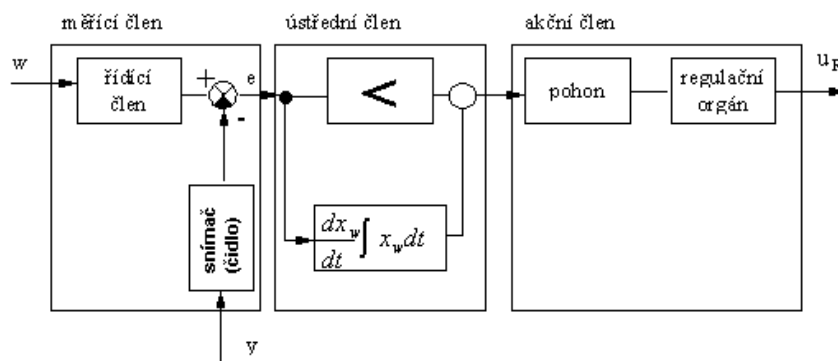
Akční člen je zařízení, které mění hodnotu akční veličiny. Pro náš případ je tvořen pouze ventilem. Zařízení, které má být regulováno, nazýváme regulovanou soustavou a zařízení, které provádí regulaci regulátorem. Obě tyto části tvoří regulační obvod.

Regulátor je zařízení, které uskutečňuje samočinnou regulaci. Hlavní součástí regulátoru je porovnávací člen, který porovnává údaj se snímače (skutečná hodnota regulované veličiny) s žádanou hodnotou a ústřední člen, který obsahuje proporcionální, integrační a derivační člen.



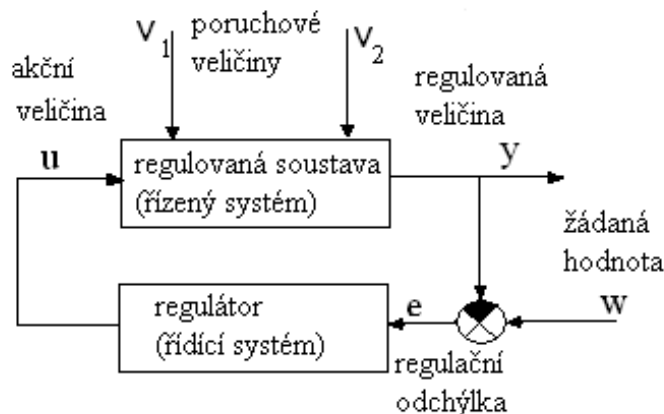
Obr. 2.3 Wattův⁵ regulátor otáček parního stroje: 1 - hlavní hřídel, 2 – roztěžník

⁵ James Watt (1736 –1819) byl skotský mechanik, vynálezce a fyzik – samouk, známý především skrze své vynálezy a vylepšení parních strojů.



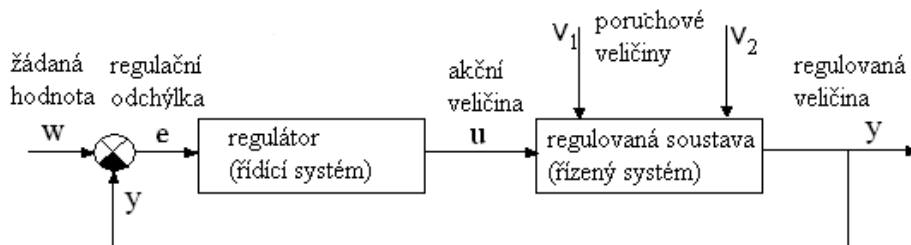
Obr. 2.4a Blokové schéma nepřímého regulátoru

Regulační obvod se nejčastěji zakresluje v blokovém schématu, které je uvedeno na následujícím obrázku.



Obr. 2.4b Blokové schéma regulačního obvodu

Jiným možným způsobem je blokové schéma na následujícím obrázku. Je to přesně týž obvod, blokové schéma má pouze jinou formu zakreslení. Způsob zobrazení je jen otázkou zvyku.



Obr. 2.4c Blokové schéma regulačního obvodu

Podle závislosti regulované veličiny rozeznáváme následující druhy regulace:

Regulace na konstantní hodnotu je v praxi nejčastějším případem. Při ní se regulovaná veličina udržuje na konstantní hodnotě, $w = \text{konst}$, $y = \text{konst}$. A samozřejmě v ustáleném stavu, kdy nepůsobí poruchy. Je to například regulace teploty v místnosti, regulace výšky hladiny v nádobě, atd. U tohoto typu regulace je důležitá kompenzace vlivu poruchy. V případě, že by nepůsobila žádná porucha, nemuseli bychom regulátor používat (pokud soustava není integrační, která nemá samoregulační schopnost).

Programová regulace je regulace, kde je vyžadováno, aby se regulovaná veličina měnila v předepsaných velikostech v zadané časové závislosti, regulovaná veličina je tedy funkcí času $w = f(t)$, $y = f(t)$.

Vlečná regulace a servomechanismy. Jedná se o regulaci, při níž se regulovaná veličina mění v závislosti na jiné vnější fyzikální veličině. Hodnota regulované veličiny má změny této vnější veličiny rychle a přesně sledovat, tedy $w = f(A)$, $y = f(A)$, kde A je právě onou veličinou. Příkladem je dávkování chemikálie do vody, kdy požadujeme změnu množství dávkované chemikálie v závislosti od okamžitého průtočného množství vody.

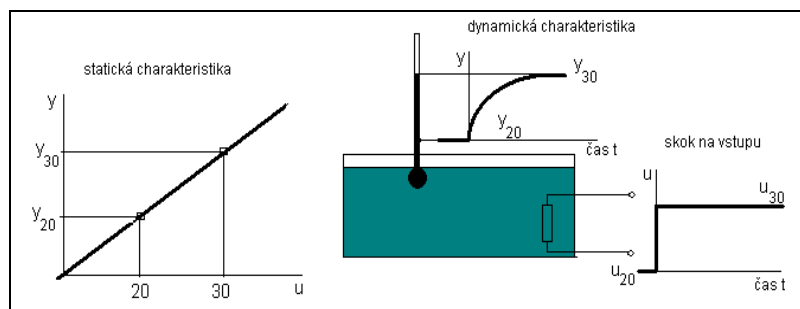
Zvláštním případem vlečné regulace jsou servomechanismy, u nichž se žádaná hodnota nemění v závislosti na jiné fyzikální veličině, ale je měněna buďto ručně nebo nějakým zařízením. Regulovaná

veličina ji pak přesně sleduje. Příkladem takové regulace je posilovač řízení v automobilech, ovládání kormidla na lodi a v letadle. U servomechanismů ovšem není rozdělení regulačního obvodu na regulátor a regulovanou soustavu.

2.2 Statická a dynamická charakteristika

Statická charakteristika je grafické vyjádření závislosti výstupní veličiny y systému na vstupní veličině u v ustáleném stavu – po odeznění přechodového děje. Měřením lze získat statickou charakteristiku tak, že změníme skokem vstupní veličinu a po ustálenou hodnotu y získáme bod statické charakteristiky.

Příklad: Pro ustálenou teplotu y_{20} pro $u = 20^\circ$ změňme vstupní hodnotu u skokem na $u = 30^\circ$. Po ustálení teploty y_{30} získáme nový bod statické charakteristiky.



Obr. 2.5 Statická a dynamická charakteristika lineární soustavy

2.3 Popis členů regulačních obvodů

Dynamické vlastnosti lineárních členů se popisují např. lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními parametry. Jednou z možností je analytické odvození z fyzikálních vlastností popisovaného děje.

Regulační obvod můžeme rozložit až na jednotlivé prvky (odpory, kapacity, pružiny, setrvačné hmoty, zesilovače, převody atp.); pak jsou jednotlivé prvky popsány nejvýše diferenciálními rovnicemi druhého řádu, kde příslušné výrazy zapíšeme zjednodušeně takto:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_2 u''(t) + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (2.1)$$

a_1, a_2 a a_0 jsou konstantní součinitelé jednotlivých prvků, z nichž někteří mohou být rovny nule.

Řešení, čili obecný integrál rovnice se skládá z obecného integrálu rovnice bez pravé strany, tj. homogenní diferenciální rovnice a z řešení partikulárního integrálu. Řešení rovnice určuje vlastní kmity dynamické soustavy poté, kdy byla soustava vyvedena z rovnováhy a ponechána nadále bez účinku vnějších veličin. Řešení partikulárního integrálu znamená řešení ustálených podmínek.⁶ Klasické řešení diferenciální rovnice je velmi často zdlouhavé, a proto je výhodnější provádět řešení pomocí Laplaceovy transformace, jak je uvedeno v kapitole 2.5.2.

Při tvorbě matematického modelu určitého systému můžeme zachovat analogii mezi prvky, jejich chováním a vazbami v nejpřísnějším slova smyslu. Taková analogie se nazývá izomorfismus. V praxi se používá analogie, která zachovává vztahy mezi zkoumaným systémem a modelem, ale zjednodušuje je. Tato analogie se nazývá homomorfismus.

Mechanická soustava O_1 (hmotnost, pružina, tlumič) podle obr. 2.6a má matematický model M_1 ve

$$\text{tvaru} \quad m \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + b \frac{dy_2(t)}{dt} + c y_2(t) = c y_1(t) \quad (2.2)$$

kde y_1 [m] je vstupní výchylka,
 y_2 [m] je výstupní výchylka,
 b [kg/s] je koeficient viskozního tření,
 c [kg/s²] je konstanta pružiny.

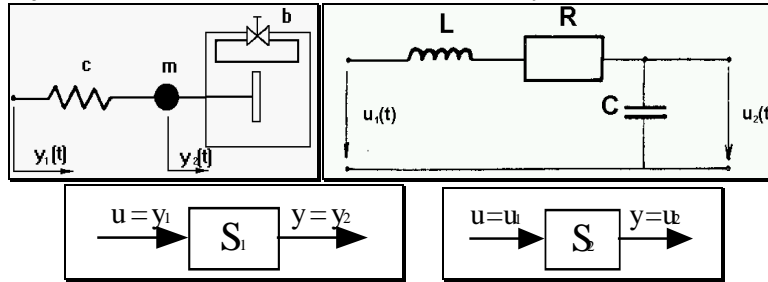
⁶ Prakticky nelze realizovat systém, jehož výstupní signál by byl první a vyšší derivací vstupního signálu. Proto v rovnici 2.1 musí být vždy splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti $m \geq n$. Blíže například Švarc, I. 2007

Elektrický obvod O_2 (indukčnost, odpor, kapacita) podle obr. 2.6b je popsán matematickým modelem M_2

$$L \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + R \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} u_2(t) = \frac{1}{C} u_1(t) \quad (2.3)$$

kde u_1 [V] je vstupní napětí,
 u_2 [V] je výstupní napětí,
 L [H] je indukčnost,
 R [Ω] je odpor,
 C [F] je kapacita.

Dynamický systém S_1 definovaný na mechanické soustavě O_1 má matematický model stejného tvaru jako dynamický systém S_2 definovaný na elektrickém obvodu O_2 , viz rovnice 2.4 a 2.5. Proto obě rovnice můžeme zapsat pomocí jediné diferenciální rovnice abstraktního systému:



Obr. 2.7 a) mechanická soustava - O_1 ; b) elektrický obvod - O_2

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (2.4)$$

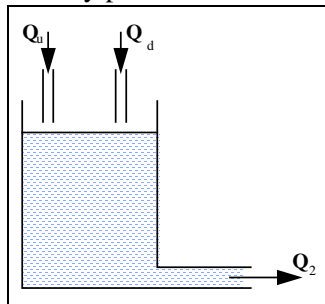
kde analogicky značí:

abstraktní systém mechanická soustava O_1 elektrický obvod O_2

u	y_1	u_1
y	y_2	u_2
$a_0 = b_0$	c	$1/C$
a_1	b	R
a_2	m	L

Vidíme, že mezi oběma matematickými modely M_1 a M_2 existuje úplná analogie, tzn. vystupuje mezi nimi izomorfismus.

Příklad: Uvažujme případ regulované soustavy pro nádrž se dvěma přítoky, dle následujícího obrázku.



Obr. 2.7 Příklad regulované soustavy

Při odvození dynamických vlastností výšky hladiny vyjdeme ze zákona o zachování hmoty

$$\frac{d}{dt} M = Q_u + Q_d - Q_2 \quad (2.5)$$

Výtokovou rychlost v_2 lze určit dle vztahu

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (2.6)$$

kde h je výška hladiny v nádrži, hmotnost vytékající kapaliny za jednotku času Q_2 [kg/s]. V závislosti na výšce určíme dle vztahu

$$Q_2 = \alpha \cdot v_2 \cdot S_2 \cdot \rho = \alpha \sqrt{2gh} S_2 \rho = k_0 \sqrt{h} \quad (2.7)$$

kde ρ je měrná hustota kapaliny

S_2 je plocha výtokového otvoru

α je výtokový koeficient

$$k_0 = \alpha \sqrt{2g} S_2 \rho$$

M je schopnost nádrže akumulovat hmotu

$$M = hS\rho$$

(2.8)

kde S je kruhový, konstantní průřez nádrže

$\frac{d}{dt} M$ je rychlost akumulace hmoty vyjádřená jako derivace akumulace hmoty podle času.

Posadíme-li do rovnice 2.5 rovnice 2.6 a 2.7 dostaneme

$$S\rho \frac{dh(t)}{dt} = Q_u + Q_d - k_0 \sqrt{h}.$$

Časovou změnu výšky lze vyjádřit vztahem

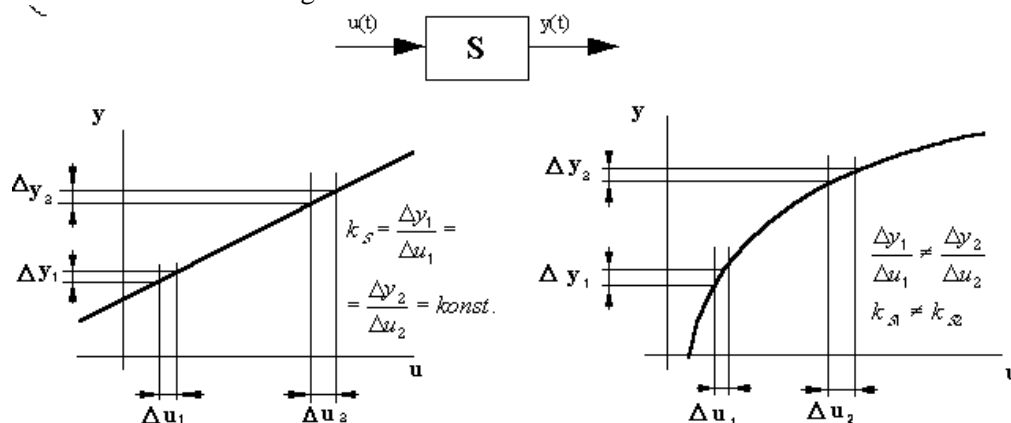
$$k_1 \frac{dh(t)}{dt} + k_0 \sqrt{h(t)} = Q_c \quad (2.9)$$

kde $k_1 = S\rho$ $Q_c = Q_u + Q_d$

Je zřejmé, že se jedná o nelineární rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty.

2.4 Linearizace

Většina reálných systémů je nelineárních. Zabýváme se ale rozбором, zda nelinearita je odstranitelná, tj. zda systém lze popsat lineárním matematickým modelem a pro řešení použít efektivních metod teorie lineárních regulačních obvodů anebo zda nelinearita je neodstranitelná a potom je nutné pro řešení použít teorie nelineárních regulačních obvodů.



Obr. 2.8 Statické charakteristiky systémů a) lineární systém, b) nelineární systém

Protože s nelineárními modely se pracuje obtížněji než s lineárními, snažíme se tyto nelineární modely nahradit lineárními modely, tj. nelineární modely linearizovat vytvořením totálního diferenciálu. Můžeme linearizovat jak statické, tak i dynamické vlastnosti daného systému. Musíme však zavést a potom i dodržet určité předpoklady, nejčastěji vymezením pracovní oblasti v blízkosti okolí pracovního bodu systému.

Z obr. 2.8 je zřejmá změna hodnoty zesílení v průběhu statické charakteristiky nelineárního systému na rozdíl od systému lineárního, kde zesílení je konstantní v celém rozsahu.

2.4.1 Linearizace tečnou v pracovním bodě

Při této linearizaci vycházíme z Taylorova rozvoje⁷ funkce v okolí pracovního bodu u_0

⁷ Řada je pojmenována po anglickém matematikovi Brookovi Taylorovi, který ji publikoval v roce 1712, avšak metoda aproximace funkce mocninnou řadou byla objevena v roce 1671 Jamesem Gregorym. Taylor (1685, 1731) studoval na univerzitě v Cambridge, od roku 1712 byl členem a v letech 1714-1718 sekretářem Královské vědecké společnosti. Stežejní díla vydaná roku 1715: *Methodus incrementorum directa and reversa* a *Linear Perspective*.

$$f(u_0 + \Delta u) = f(u_0) + \frac{1}{1!} f'(u_0) \cdot \Delta u + \frac{1}{2!} f''(u_0) \Delta u^2 + \dots$$

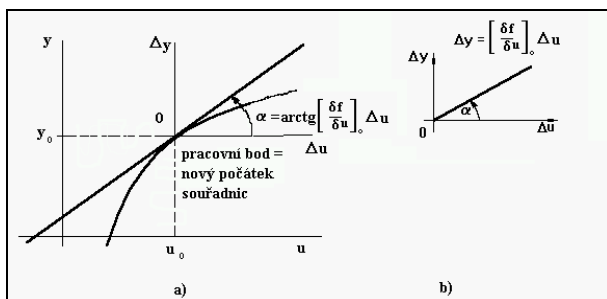
Uvažujeme-li z Taylorova rozvoje pouze lineární část, pak

$$f(u_0 + \Delta u) = f(u_0) + f'(u_0) \cdot \Delta u \quad (2.10)$$

Jestliže zavedeme nový počátek souřadnic v pracovním bodě, pak rovnice 2.10 má tvar

$$\Delta y = k_1 \Delta u$$

kde $k_1 = f'(u_0)$



Obr. 2.9 Statická charakteristika a) princip linearizace tečnou b) po linearizaci v nových souřadnicích

Poznámka:

V případě, že křivka statického systému je dána výsledky získanými měřeními, je výhodné použít regresní metody.

2.5 Analýza automatických regulačních obvodů

Analýza se zabývá především:

- vyjadřováním dynamiky těchto obvodů lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty, v nichž nezávisle proměnnou je čas,
- řešením těchto rovnic.

V následující kapitole budou uvedeny možnosti řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

2.5.1 Klasické řešení

Mějme rovnici s

$$x + 3x' + 2x'' = 1$$

Předpokládejme, že diferenciální rovnice má počáteční podmínky pro $t = 0$, $x = 0,5$, $x' = 1,0$

Dosadíme-li do diferenciální rovnice operátor (diferenciální operátor) s k označení derivace podle času, pak

$$(1 + 3s + 2s^2)X = 1$$

kde výraz $(1 + 3s + 2s^2)$ položen rovný nule nazýváme charakteristickou rovnicí homogenní diferenciální rovnice. Tuto nehomogenní rovnici napíšeme ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$(1 + s)(1 + 2s)X = 1$$

pro kořeny $-1/2$ a -1 .

Úplné řešení je dáno součtem obecného a partikulárního řešení

$$x = c_1 e^{-1/2t} + c_2 e^{-t} + 1 \quad (2.11)$$

Exponenty e jsou vždy kořeny charakteristické rovnice násobené t a c_1, c_2 jsou konstanty, které lze určit z počátečních podmínek.

Uvažujeme opět tvar $x = c_1 e^{-1/2t} + c_2 e^{-t} + 1$

Pak pro $x = 0,5$ platí $0,5 = c_1 + c_2 + 1$

Derivace $x' = -\frac{1}{2}c_1 e^{-1/2t} - 1c_2 e^{-t}$

a pro $x' = 1,0$ platí $1,0 = -\frac{1}{2}c_1 e^{-1/2t} - 1c_2 e^{-t}$

Výpočtem konstant pro systém lineárních algebraických rovnic

$$c_1 + c_2 = -0,5$$

$$-1/2c_1 - c_2 = 1$$

obdržíme $c_1 = 1$ a $c_2 = -1,5$

což dá výslednou rovnici $x = e^{-t/2} - 1,5e^{-t} + 1$

Příklad : Uvažujme nyní rovnici (příklad netlumených kmitů na výstupu)

$$x'' + 25x = 1$$

Charakteristická rovnice

$$s^2 + 25 = 0$$

její kořeny: $s = \pm j5$, kde $j = \sqrt{-1}$

$$\text{Úplné řešení } x = c_1 e^{-j5t} + c_2 e^{+j5t} + \frac{1}{25} \quad (2.12)$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty závislé na počátečních podmínkách.

Jsou-li x a x' rovny nule pro $t = 0$, dostaneme dosazením

$$0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{25} \quad (2.12)$$

Derivujeme-li, dostaneme

$$x' = -5j c_1 e^{-j5t} + 5j c_2 e^{+j5t}$$

Pro $t = 0$, rovnice má tvar

$$0 = -5j c_1 + 5j c_2 \quad (2.14)$$

Vyřešením rovnic 2.12 a 2.14

$$c_1 = c_2 = -\frac{1}{50}$$

Dosazením do rovnice (2.12) dává

$$x = -\frac{1}{50} e^{-j5t} - \frac{1}{50} e^{+j5t} + \frac{1}{25} \quad (2.15)$$

Poznámka:

Protože $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$ ⁸

rovnice 2.15 může být přepsána: $x = -\frac{1}{25} \cos 5t + \frac{1}{25}$

Z této rovnice je zřejmé, že v soustavě nastávají netlumené kmity, což již dokazovaly komplexně sdružené imaginární kořeny charakteristické rovnice.

2.5.2 Řešení pomocí Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace (L-transformace) je matematický nástroj, který podstatně usnadňuje řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Ačkoliv tato metoda byla odvozena již v roce 1820 P. S. Laplace,⁹ teprve v nedávno minulém čase dosáhla širokého uplatnění. Laplaceova transformace umožňuje transformovat diferenciální rovnici na algebraickou, kterou lze převést do žádaného tvaru. Zpětnou transformací můžeme dostat úplné řešení původní diferenciální rovnice. Počáteční či okrajové podmínky jsou do řešení pojaty. Protože mnoho úloh vede na podobné vzorce, může být jejich řešení zaznamenáno do tabulek a seřazeno pro další použití.

⁸ Tato rovnice byla známa už počátkem 18. století, Leonard Euler ji v roce 1748 zpopulizoval, uvedl rovnici ve tvaru $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, která platí pro každé reálné číslo x .

⁹ Pierre Simon de Laplace, (1749-1827) byl francouzský matematik, fyzik, astronom a politik; člen Francouzské akademie věd, královské společnosti v Londýně a Komise pro míry a váhy. Laplace je právem považován za jednoho z největších vědců vůbec. Zabýval se matematickou analýzou, teorií pravděpodobnosti, nebeskou mechanikou, teorií potenciálu, zavedl pojem Laplaceovy transformace, tzv. Laplaceův operátor (v parciální diferenciální rovnici pro potenciál silového pole). Je autorem teorie o vzniku sluneční soustavy z rotující mlhoviny (Kantova-Laplaceova teorie) a mnoha dalších teorií a metod s mnoha aplikacemi.

Laplaceova transformace eliminuje v podstatě čas t jako nezávisle proměnnou v diferenciálních rovnicích a nahrazuje ho operátorem s . Ačkoliv je tento operátor komplexní veličinou (to znamená, že se skládá z reálné a imaginární části), může se s ním nakládat podobně jako s operátorem s v předchozí kapitole. Jsou-li počáteční podmínky rovny nule, jsou oba operátory téměř totožné. Hlavní rozdíl mezi metodou použitou v předchozí kapitole a Laplaceovou transformací je v tom, že Laplaceova transformace umožňuje stanovit definitivní pravidla, jak obsáhnout počáteční podmínky již při psaní diferenciální rovnice. Když provedeme zpětnou transformaci do časové oblasti, dostaneme úplné řešení.

Transformace z časové oblasti do operátorového tvaru se provádí integrací diferenciální rovnice v mezích 0 až ∞ . V čase $t = 0^+$ má funkce své počáteční podmínky, ale před $t = 0$ předpokládáme, že jsou všechny proměnné nulové. Partikulární integrál, který vyjde, je relativně jednoduchý. Protože při Laplaceově transformaci úlohy vedou na opakující se vzorce, můžeme obvykle hledané řešení nalézt v tabulkách Laplaceových transformací v tzv. „slovníku“. Málodky tedy musíme použít transformačního integrálu. Všeobecně se řešitel musí obeznámit s několika relativně jednoduchými operacemi a měl by též porozumět i matematickým základům, na nichž je založena Laplaceova transformace.

Laplaceova transformace přímá je dána vztahem:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.16)$$

kde $f(t)$ je originálem (předmětem) a je reálnou funkcí definovanou v časové oblasti pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$,

$F(s)$ - obraz, je komplexní funkcí derivovanou v oblasti komplexní proměnné,

$s = \alpha + j\omega$ - komplexní proměnná ($\alpha = \text{Re } s$, $\omega = \text{Im } s$),

t - reálná proměnná (v našem případě čas),

L - operátor přímé Laplaceovy transformace,

Aby funkce $f(t)$ v integrálu 2.16 byla integrace schopna, tj. aby existoval obraz, musí být splněny níže uvedené požadavky na funkci $f(t)$:

1. musí být nulová pro záporný čas, tj. pro $t \geq 0$ $f(t) \neq 0$ a pro $t < 0$ $f(t) = 0$.

2. musí být alespoň po částech spojitá,

3. musí být funkcí exponenciálního řádu, tj. musí vyhovovat nerovnosti $|f(t)| \leq Me^{\alpha_0 t}$

kde $M > 0$; $\alpha_0 \in (-\infty, \infty)$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$.

2.5.3 Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná (inverzní, nepřímá) Laplaceova transformace transformuje funkce komplexní proměnné s na funkce reálné proměnné t .

Nechť $F(s)$ je Laplaceova transformace funkce $f(t)$, $t > 0$; potom je zpětná Laplaceova transformace definována integrálem

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s)e^{st} ds. \quad (2.17)$$

Leží-li póly funkce $F(s)$ vlevo od přímky $s = \alpha_0$, kde α_0 je reálná konstanta větší než nula, tj. v polovině $\text{Re } s > \alpha_0$ funkce $F(s)$ nemá žádné singulární body (obr. 2.10), je možné integraci provést podél přímky $s = \alpha_0 + j\omega$. Potom místo integrace v komplexní rovině provedeme prostou integraci podle jedné proměnné ω a místo vztahu (2.17) můžeme psát

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_c F(s)e^{st} ds,$$

Což znamená vyčíslování křivkového integrálu po uzavřené křivce c , která v sobě uzavírá všechny singulární body funkce $F(s)$. Toto vyčíslování je možné residuovou větou, ale většinou se nepoužívá a v praxi se zpětná transformace provádí pomocí slovníku nebo dále uvedenou metodou - Heavisidův rozvoj.

2.5.4 Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace má několik důležitých vlastností, které mohou být použity při výpočtu Laplaceových transformací funkcí, při řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a při řešení některých úloh řízení dynamických systémů. Je-li $F(s) = L\{f(t)\}$, pak platí:

1. Věta o derivování originálu

pro 0. derivaci $L\{f(t)\} = F(s)$

pro 1. derivaci: $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

pro 2. derivaci: $L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf'(0) - f''(0)$

pro 3. derivaci: $L\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$

pro n -tou derivaci

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} f(0)}{dt^{i-1}} =$$

$$= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

2. Věta o integrování originálu $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$.

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s),$$

3. Věta o počáteční a koncové hodnotě

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

4. Věta o linearitě $L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$,

$$L^{-1}\{b_1 F_1(s) + b_2 F_2(s)\} = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t).$$

5. Věta o posunutí originálu (o opoždění) $L\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$, kde $a \geq 0$ a $f(t-a)=0$ pro $t < a$.

6. Věta o posunutí obrazu, resp. o útlumu $L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$.

$$L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as),$$

7. Věta o podobnosti, resp. o změně měřítka

$$L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = af(at).$$

Příklad: Určeme Laplaceův obraz jednotkového skoku

$$f(t) = 1 \text{ pro } t \geq 0$$

$$f(t) = 0 \text{ pro } t < 0.$$

$$F(s) = L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s}[e^{-\infty} - e^0] = \frac{1}{s}$$

2.6 Heavisideův rozvoj

Při určování originálu funkce $f(t)$ k jejímu obrazu $F(s)$ se v teorii automatického řízení často vyskytne případ, že funkce $F(s)$ je racionální lomená funkce, která má ve jmenovateli i čitateli polynomy vyšších stupňů. Takovou funkci nenajdeme v operátorovém slovníku, proto ji musíme nejdříve upravit, tj. rozložit na jednodušší výrazy - v parciální zlomky a k těm pak podle operátorového slovníku najít originál.

Rozklad v parciální zlomky lze provést např.

- metodou neurčitých součinitelů, známou z matematiky, resp.

- použitím Heavisideova rozvoje¹⁰, kterého se běžně v regulační technice užívá.

Uvažujme obraz $X(s)$ ve tvaru racionální funkce lomené

¹⁰ Oliver Heaviside (1850 – 1925), anglický fyzik a matematik. Odvodil techniku použití Laplaceovy transformace pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Spolu s Hertzem přeformuloval Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole tak, aby byly použitelné pro výpočty polí. Odvodil pole kolem pohybujícího se náboje.

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad n > m$$

Tento výraz rozložíme na parciální zlomky, pro které již z operátorového slovníku L-transformace snadno najdeme odpovídající korespondence.

Mnohočlen ve jmenovateli můžeme zapsat ve tvaru

$$N(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n),$$

kde s_1, s_2, \dots, s_n jsou póly (singulární body) racionální lomené funkce $X(s)$ ¹¹

$$N(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Řešení metodou neurčitých součinitelů:

Příklad: Uvažujme diferenciální rovnici

$$x + 3x' + 2x'' = 1 \tag{2.18}$$

a počáteční podmínky pro $t=0$ jsou $x_0 = 0,5$ a $x_0' = 1,0$.

Laplaceova transformace rovnice (2.18) má tvar

$$X + 3sX - 3x_0 + 2s^2 X - 2x_0 s - 2x_0' = \frac{1}{s}$$

$$x(t) = X(s)$$

$$x'(t) = sX(s) - x(0)$$

$$x''(t) = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)$$

kde X značí Laplaceovu transformaci x . Řešením získáme

$$X = \frac{1 + (3x_0 + 2x_0')s + 2x_0 s^2}{s(1 + 3s + 2s^2)}$$

Rozložíme-li jmenovatele do kořenových činitelů a dosadíme číselné hodnoty pro x_0 a x_0' , získáme tvar

$$X = \frac{1 + 3,5s + s^2}{s(1 + s)(1 + 2s)}$$

Obecné řešení je dáno v podrobném slovníku Laplaceových transformací. Dosazením číselných hodnot za součinitele dostaneme řešení

$$x = e^{-t/2} - 1,5e^{-t} + 1$$

Příklad: Řešme homogenní diferenciální rovnici

$$x'' + 5x' + 6x = 0$$

s počátečními podmínkami $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

$$x(t) = X(s)$$

$$x'(t) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

$$x''(t) = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s) - s + 1$$

$$[s^2 X(s) - s + 1] + 5[sX(s) - 1] + 6[X(s)] = 0$$

$$X(s)[s^2 + 5s + 6] = s + 4$$

$$X(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 5s + 6}$$

Obraz řešení převedme nyní do originálu $N(s) = s^2 + 5s + 6$

Pro kořeny $s_{1,2} = -2, -3$ získáme $X(s) = \frac{s + 4}{(s + 2)(s + 3)}$

Dosazením číselných hodnot v Laplaceově slovníku (Šalomon M. 1957) obdržíme přímo $x = 2e^{-2t} - 1e^{-3t}$

¹¹ Jsou to kořeny, které mohou být i komplexně sdružené rovnice $a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

2.6.1 Rozklad do parciálních zlomků – řešení použitím Heavisideova rozvoje

Rozklad do parciálních zlomků, jsou-li **kořeny jmenovatele různé**

Známe vcelku jednoduchou metodu k rozkladu pravého zlomku do částečných zlomků, jsou-li kořeny jmenovatele různé. V dalším je naznačen postup, jestliže

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (2.19)$$

přičemž $A(s)$ a $B(s)$ jsou polynomy v s , potom

$$F(s) = \frac{A(s)}{K_0(s-a)(s-b)(s-c)\dots} \quad (2.20)$$

kde K_0 je součinitel nejvyšší mocniny s v polynomu $B(s)$.

$$F(s) = \frac{K_1}{s-a} + \frac{K_2}{s-b} + \frac{K_3}{s-c} + \dots \quad (2.21)$$

kde a, b, c, \dots jsou kořeny s pro $B(s)=0$ a K_1, K_2, K_3, \dots jsou konstanty, které je nutno určit. Každou konstantu můžeme najít násobením rovnic (2.20) a (2.21) odpovídajícím kořenovým činitelem, položíme-li s rovno kořenu. Tedy k určení K_1 násobme $(s-a)$, což dá

$$K_1 + \frac{K_2(s-a)}{(s-b)} + \frac{K_3(s-a)}{(s-c)} + \dots = (s-a)F(s) = \frac{A(s)}{K_0(s-b)(s-c)\dots}$$

Když tedy položíme $s = a$, potom $K_1 = \frac{A(a)}{K_0(a-b)(a-c)\dots} = (s-a)F(s)$

Podobně $s = b$ $K_2 = \frac{A(b)}{K_0(b-a)(b-c)\dots} = (s-b)F(s)$

a dále $s = c$ $K_3 = \frac{A(c)}{K_0(c-a)(c-b)\dots} = (s-c)F(s)$

atd.

Příklad:

$$F(s) = \frac{14s^2 + 55s + 51}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12}$$

Kořeny jmenovatele jsou $a = -1, b = -2, c = -3$. Proto rovnici (2.22) můžeme vyjádřit:

$$F(s) = \frac{14s^2 + 55s + 51}{2(s+1)(s+2)(s+3)}$$

nebo ve tvaru částečných zlomků

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

Protože $K_0 = 2, a = -1, b = -2$ a $c = -3$

$$K_1 = \frac{A(a)}{K_0(a-b)(a-c)} = \frac{14(-1)^2 + 55(-1) + 51}{2(-1+2)(-1+3)} = \frac{(14-55+51)}{2(1)(2)} = 2,5$$

Podobně $K_2 = 1,5$ a $K_3 = 3$.

$$F(s) = \frac{2,5}{s+1} + \frac{1,5}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

Inverzní Laplaceova transformace

Je-li $F(s)$ vyjádřeno ve tvaru částečných zlomků, např.

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-r_2} + \frac{K_3}{s-r_3} + \dots \quad (2.22a)$$

je inverzní Laplaceova transformace

$$f(t) = K_1 + K_2 e^{r_2 t} + K_3 e^{-r_3 t} + \dots \quad (2.22b)$$

kde r_2, r_3, \dots jsou kořeny jmenovatele $F(s)$ a pro náš příklad má inverzní Laplaceova transformace tvar

$$f(t) = 2,5e^{-t} + 1,5e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

Příklad: Určeme funkci $f(t)$ k obrazu $F(s) = \frac{4s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$\frac{4s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

Konstanty K_1, K_2, K_3 určíme podle vztahu

$$K_i = [(s - s_i)F(s)]_{s=s_i}$$

$$K_1 = \left[\frac{4s+6}{(s+2)(s+3)} \right]_{s=-1} = +1$$

$$K_2 = \left[\frac{4s+6}{(s+1)(s+3)} \right]_{s=-2} = +2$$

$$K_3 = \left[\frac{4s+6}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-3} = -3$$

Originál potom získáme zpětnou transformací součtu parciálních zlomků

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{s+3} \right\}$$

$$f(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

Kdyby některá z konstant K_1, K_2, K_3 atd. se rovnala nule, znamená to, že $F(s)$ není "redukovaný". To znamená, že čitatel a jmenovatel obsahuje stejné kořeny. Nastane-li tento případ, musíme čitatele i jmenovatele vyjádřit ve tvaru součinu kořenových činitelů a stejné výrazy vykrátit.

Metodu lze použít i v případech, kdy některé z kořenů jmenovatele jsou **komplexně sdružené**. Potom na rozdíl od klasické metody neurčitých součinitelů napíšeme rozklad ve tvaru, např. pro funkci, která má kořeny polynomu jmenovatele $s_1 = -2, s_{2,3} = -1 \pm j2$,

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$$

ale ve tvaru

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+1-j2} + \frac{K_3}{s+1+j2}$$

Další postup je stejný jako u reálných kořenů.

Příklad: Najděme originál $f(t)$ k danému obrazu $F(s)$ - racionální funkci lomené, v polynomu jmenovatele jsou dva kořeny komplexně sdružené: $s_{1,2} = -1 \pm j$ a dva kořeny reálné $s_3 = -2, s_4 = -4$;

$$F(s) = \frac{20(s+1)(s+3)}{(s+1+j)(s+1-j)(s+2)(s+4)}$$

Zpětnou transformaci provedeme použitím Heavisideova rozvoje

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1+j} + \frac{K_2}{s+1-j} + \frac{K_3}{s+2} + \frac{K_4}{s+4}$$

Výpočet konstant K_i , kde $i = 1,2,3,4$, provedeme podle vztahu

$$K_1 = [(s+1+j)F(s)]_{s=-1-j} = 4 + j3$$

$$K_2 = [(s+1-j)F(s)]_{s=-1+j} = 4 - j3$$

$$K_3 = [(s+2)F(s)]_{s=-2} = -5$$

$$K_4 = [(s+4)F(s)]_{s=-4} = -3$$

Originál tedy bude

$$\begin{aligned}
f(t) &= (4 + j3)e^{(-1-j)t} + (4 - j3)e^{(-1+j)t} - 5e^{-2t} - 3e^{-4t} = \\
&= (4 + j3)e^{-t}[\cos t - j \sin t] + (4 - j3)e^{-t}[\cos t + j \sin t] - 5e^{-2t} - 3e^{-4t} = \\
&= e^{-t}(8 \cos t + 6 \sin t) - 5e^{-2t} - 3e^{-4t}.
\end{aligned}$$

Rozklad v částečné zlomky, jsou-li některé kořeny jmenovatele stejné – násobný kořen

Často obsahuje jmenovatel $F(s)$ dva či více stejných kořenů, jako např.:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)^3(s+3)}$$

V podobných případech rozklad v částečné zlomky má tvar:

$$F(s) = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{C_3}{(s+2)^3} + \frac{K_1}{s+3} + \frac{K_2}{s}$$

kde konstanty K_1 a K_2 můžeme určit způsobem uvedeným v předchozí kapitole a konstanty C_1 , C_2 , a C_3 určíme následujícím způsobem:

Konstantu C_3 určíme jako konstanty pro nestejné kořeny. To je : (pro $s = -2$)

$$C_3 = (s+2)^3 F(s) = \frac{1}{s(s+3)} = -\frac{1}{2}$$

C_2 určíme ze vztahu (pro $s = -2$)

$$C_2 = \frac{d}{ds} (s+2)^3 F(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right] = \frac{1}{4}$$

Poznámka: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Podobně vypočteme C_1 pro $s = -2$

$$C_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s+2)^3 F(s) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right] = -\frac{3}{8}$$

Konečný úplný rozvoj:

$$F(s) = \frac{-3}{8(s+2)} + \frac{1}{4(s+2)^2} - \frac{1}{2(s+2)^3} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{24s}$$

Pro násobné kořeny lze formulovat obecná pravidla, a to:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s-a)^n(s-b)}$$

potom

$$F(s) = \frac{C_1}{(s-a)} + \frac{C_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{C_n}{(s-a)^n} + \frac{K_1}{(s-b)}$$

přičemž a je násobný kořen a b jednoduchý. Hodnoty součinitelů C jsou (pro $s = a$):

$$C_n = (s-a)^n F(s)$$

$$C_{n-1} = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [(s-a)^n F(s)]$$

$$C_{n-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s-a)^n F(s)]$$

Hledaný originál bude

$$f(t) = -\frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{2}t^2e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{24}$$

Příklad: Řešme diferenciální rovnici se zadanými počátečními podmínkami a s budící funkcí jednotkového skoku ($u(t)=1$ pro $t \geq 0$, $u(t) = 0$ pro $t < 0$, $U(s) = 1/s$)

$$\begin{aligned}
x'' + 5x' + 6x &= 3u' + 3u \\
x(0) = 1, \quad x'(0) &= 3 \\
[s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)] + 5[sX(s) - x(0)] + 6X(s) &= \\
= 3[sU(s) - u(0)] + 3U(s) \\
X(s)[s^2 + 5s + 6] &= U(s)[3s + 3] + [sx(0) + x'(0) + 5x(0) - 3u(0)] \\
X(s)[s^2 + 5s + 6] &= \frac{1}{s}[3s + 3] + s + 3 + 5 - 3 \\
X(s)[s^2 + 5s + 6] \cdot s &= 3s + 3 + (s + 5) \cdot s \\
X(s)[s^2 + 5s + 6] \cdot s &= s^2 + 8s + 3 \\
X(s) &= \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s + 2)(s + 3)} \tag{2.23} \\
X(s) &= \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 0} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 3} \\
K_1 &= \frac{s^2 + 8s + 3}{(s + 2)(s + 3)} = 0,5 \quad \text{pro } s = 0 \\
K_2 &= \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s + 3)} = 4,5 \quad \text{pro } s = -2 \\
K_3 &= \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s + 2)} = -4 \quad \text{pro } s = -3 \\
X(s) &= \frac{0,5}{s} + \frac{4,5}{s + 2} - \frac{4}{s + 3}
\end{aligned}$$

Výsledná rovnice má tvar $x(t) = [0,5 + 4,5e^{-2t} - 4e^{-3t}]$

Kontrola:

Při nalezení obrazu lze využít limitních vět o počáteční a konečné hodnotě ke kontrole, neboť počáteční hodnoty se musí rovnat zadaným počátečním podmínkám.

Vraťme se nyní k obrazu, který jsme již určili ve tvaru (2.23).

$$X(s) = \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s + 2)(s + 3)} \tag{2.24}$$

Abychom mohli nalézt počáteční hodnotu funkce, můžeme použít teorém o počáteční hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s + 2)(s + 3)} = 1$$

$$L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = \frac{(s^2 + 8s + 3)s}{s(s + 2)(s + 3)} - 1 = \frac{3s - 3}{(s + 2)(s + 3)}$$

$$x'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{3s - 3}{(s + 2)(s + 3)} = 3$$

Ukažme nyní nalezení limitních hodnot pro $t \rightarrow \infty$. Výpočet provedeme pomocí teorému o konečné hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

Uvedený teorém nelze použít, jestliže reálné kořeny nebo reálná složka komplexních kořenů jmenovatele nejsou záporné.

$$\begin{aligned}
x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 8s + 3}{s(s+2)(s+3)} = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 8s + 3}{(s+2)(s+3)} = \frac{3}{6} = 0,5 \\
x'(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{3s-3}{(s+2)(s+3)} = 0.
\end{aligned}$$

Nulová hodnota $x'(0)$ je příznačná pro stabilní systémy. Pro stabilní systémy platí, že nejen první, ale všechny derivace vybuzené funkce konvergují k nule. Platí tedy pro

$$x''(\infty) + 5x'(\infty) + 6x(\infty) = 3u'(\infty) + 3u(\infty)$$

$$0 + 0 + 6x(\infty) = 0 + 3u(\infty)$$

$$x(\infty) = \frac{3}{6}u(\infty) = \frac{3}{6} \cdot 1 = 0,5$$

Ověřme nyní limitní hodnoty v předmětu již určeném a daným vztahem

$$x(t) = [0,5 + 4,5e^{-2t} - 4e^{-3t}]u(t)$$

$$x'(t) = [-9e^{-2t} + 12e^{-3t}]u(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0,5 + 4,5 - 4 = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,5$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} x'(t) = -9 + 12 = 3$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$$

2.6.2 Určení kořenů algebraických rovnic

V předchozích kapitolách bylo při řešení lineárních diferenciálních rovnic uvedeno, že je nutno nalézt kořeny jmenovatele. Uvedme princip jedné z metod postupného dělení.

Při řešení reálných a komplexních sdružených kořenů polynomu lze použít některou z metod postupného dělení. Např. u metody She Nyve Lina se používá následující postup:

Předpokládejme polynom ve tvaru

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (2.25)$$

a první dělitel je

$$s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} \quad (2.26)$$

Dělíme polynom (2.25) polynomem (2.26)

$$\begin{aligned}
&(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0) : \left(s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} \right) = \\
&= s^{n-2} + \dots + b_2s^2 + b_1s + b_0
\end{aligned}$$

a zbytek $c_1s + c_0$.

Nejsou-li koeficienty zbytku c_1 a c_0 zanedbatelné, opakujeme postup s dalším dělitelem např. ve tvaru

$$s^2 + \frac{b_1}{b_2}s + \frac{a_0}{b_2}.$$

Výpočet opakujeme, pokud zbytek není menší, nežli zvolená hodnota, např. 0,01.

Příklad: Uvažujeme polynom $(s^2 + s + 1)(s^2 + 10s + 100) = s^4 + 11s^3 + 111s^2 + 110s + 100$ s kořeny $-0,5 \pm 0,866i$ a $-5 \pm 8,660i$.

První dělitel je

$$s^2 + \frac{110}{111}s + \frac{100}{111} = s^2 + 0,99s + 0,9$$

a dělení provedeme následovně

$$(s^4 + 11,00s^3 + 111,00s^2 + 110,00s + 100,00) : (s^2 + 0,99s + 0,90) = \\ = s^2 + 10,01s + 100,20$$

$$\begin{array}{r} s^4 + 0,99s^3 + 0,90s^2 \\ \hline 10,01s^3 + 110,10s^2 + 111,00s \\ \hline 10,01s^3 + 9,90s^2 + 9,00s \\ \hline 100,20s^2 + 101,00s + 100,00 \\ \hline 100,20s^2 + 99,20s + 99,20 \\ \hline 1,8s + 9,8 \\ \text{zbytek} \end{array}$$

Protože zbytek není zanedbatelný, volíme nový dělitel, a ve výpočtu pokračujeme, dokud koeficienty zbytku nejsou zanedbatelné.

Výsledný polynom odpovídá našemu zadání, $(s^2 + s + 1)(s^2 + 10s + 100)$.

Modifikace uvedené metody pro určení kořenů využívající uvedeného postupu (metoda Bairstowova) je využita v programu, sestavenému v jazyce Turbo Pascal 7.0:

program polynom ;

uses Crt,Dos;

var n1:integer;

 i,n,m,n2:integer;

 a:array [0 .. 100] of real;

 b:array [0 .. 100] of real;

 p:array [0 .. 100] of real;

 e,so,ro,r,s,l,d:real;

 d1,d2,d3,w:real;

 label 10;

 procedure kvadrov (var b,c:real);

 var d,w,rel,re2,im1,im2:real;

 begin

 d:=(b*b)-(4*c);

 if (d>0) then

 begin

 w:=sqrt(d);

 rel:=(-b+w)/2;

 re2:=(-b-w)/2;

 im1:=0;

 im2:=0;

 end;

 if (d=0) then

 begin

 rel:=-b/2;

 re2:=rel;

 im1:=0;

 im2:=0;

 end;

 if (d<0) then

 begin

 w:=sqrt(-d);

 rel:=-b/2;

 re2:=rel;

 im1:=w/2;

 im2:=-im1;

 end;

 writeln(rel, ' +',im1, ' i');

 writeln(re2, ' +',im2, ' i');

 end;

begin

 clrscr;

 writeln(' Reseni korenu polynomu');

 writeln(' Bairstowova metoda');

```

writeln(' ');
writeln(' Polynom:a0*x^n +a1*x^(n-1) +a2*x^(n-2) + .. +an');
write(' Zadej stupen polynomu : ');read(n1);
writeln(' ');
writeln(' Zadej koeficienty:');
for i:=0 to n1 do
    begin
        write('a',i,',');read(a[i]);
        a[i]:=a[i]/a[0];
    end;
{ writeln(' ');
writeln(' Zadej pozadovanou presnost :');read(e);
} e:=0.1;
so:=0.1;
ro:=0.1;
m:=0;
writeln(' KORENY POLYNOMU');
10:r:=ro;
s:=so;
l:=0;
n:=n1-(2*m);
if (n>2) then
    while l<100 do
        begin
            b[1]:=a[1]-r;
            b[2]:=a[2]-r*b[1]-s;
            for i:=3 to n do
                begin
                    b[i]:=a[i]-r*b[i-1]-s*b[i-2];
                end;
            p[1]:=-1;
            p[2]:=r-b[1];
            for i:=3 to n do p[i]:=-b[i-1]-(r*p[i-1])-(s*p[i-2]);
            d1:=(p[n-1]*p[n-1])-p[n-2]*(p[n]+b[n-1]);
            d2:=(-b[n-1]*p[n-1])+b[n]*p[n-2];
            d3:=-p[n-1]*b[n]+b[n-1]*(p[n]+b[n-1]);
            d2:=d2/d1;
            d3:=d3/d1;
            r:=r+d2;
            s:=s+d3;
            if ((abs(d2))+abs(d3))<e) then
                begin
                    a[1]:=r;
                    a[2]:=s;
                    kvadrov(a[1],a[2]);
                    m:=m+1;
                    n2:=n1-2*m;
                    for i:=1 to n2 do a[i]:=b[i];
                    goto 10;
                end;
        end;
    if (l>100) then
        begin
            writeln(' NEKONVERGUJE, konec');
            exit;
        end;
    l:=l+1;
end;
if (n=2) then kvadrov(a[1],a[2]);
if (n<2) then writeln(-a[1],'+',0.0,' i');
readln;readln;
end.

```

```

Reseni korenu polynomu
Bairstowova metoda

Polynom:a0*x^n +a1*x^(n-1) +a2*x^(n-2) + .. +an
Zadej stupen polynomu : 4

Zadej koeficienty:
a0=1
a1=11
a2=111
a3=110
a4=100

KORENY POLYNOMU
-4.9999997885E-01 + 8.6602539185E-01 i
-4.9999997885E-01 +-8.6602539185E-01 i
-5.0003234325E+00 + 8.6604407393E+00 i
-5.0003234325E+00 +-8.6604407393E+00 i

```

2.7 Řešení diferenciálních rovnic pomocí simulačních programů

Řešení diferenciálních rovnic lze provést rovněž pomocí simulačních programů (v dobách analogových počítačů oblíbené řešení). Existují dvě metody řešení - metoda snižování řádu derivace a metoda postupné integrace.

2.7.1 Metoda snižování řádu

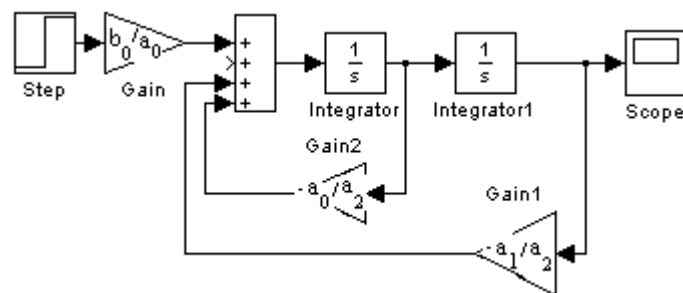
Uvažujeme diferenciální rovnici bez derivace na pravé straně

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = b_0 u$$

Pro návrh regulačního schématu upravme rovnici do tvaru

$$x'' = \frac{b_0}{a_2} u - \frac{a_1}{a_2} x' - \frac{a_0}{a_2} x \quad (2.27)$$

Dostali jsme tak diferenciální rovnici ve tvaru vyjadřující nejvyšší derivaci x'' jako lineární kombinaci derivací nižších, čímž snadno realizujeme schéma ve tvaru



Dynamické chování simulací umožňuje velmi snadno - změnou koeficientů - měnit parametry systému a zkoumat reakci i na obecné buzení.

Program v Turbo Pascalu:

{odezva soustavy na skok resenim dif. rovnice 2.radu metodou snizovani radu derivace}

```

uses crt;
var x,y1,y0,h,u,a2,a1,a0,b0:real;
i,ip:integer;
begin
clrscr;
writeln('zadej y(0),y'(0)');
read(y0,y1);
writeln('zadej koeficienty a2*y''+a1*y'+a0*y=b0*u');
readln(a2,a1,a0,b0);
u:=1; h:=0.001;
{ vypocet v bode nula }
writeln(0.0:10:2,y1:10:3,y0:10:3);
{ vypocet v dalsich krocich }
ip:=1;x:=0;
{ h integracni krok ip kontrola krokovani tisku }
while x<10 do
begin
ip:=ip+1;
y1:=((-a0/a2*y0+y1*-a1/a2+u*b0/a2)*h)+y1; { prvni integrator }
y0:=y1*h+y0; { druhy integrator }
if ip=500 then begin
writeln(x:10:2,y1:10:3,y0:10:3);
ip:=1;
end;
x:=x+h;
end;
readln;
end.

```

2.7.2 Metoda postupné integrace

Uvažujme opět diferenciální rovnici

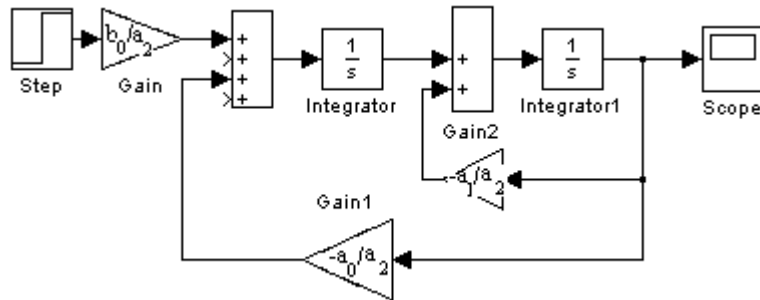
$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = b_0 u$$

Tuto rovnici dvakrát integrujeme v intervalu od 0 do t za předpokladu nulových počátečních podmínek

$$a_2 x(\tau) + a_1 \int_0^\tau x(\tau) d\tau + a_0 \int_0^\tau \int_0^\tau x(\tau) d\tau^2 = b_0 \int_0^\tau \int_0^\tau u(\tau) d\tau^2$$

Osamostatníme-li $x(\tau)$, pak

$$x(\tau) = \frac{b_0}{a_2} \int_0^t \int_0^t u(\tau) d\tau^2 - \frac{a_1}{a_2} \int_0^t x(\tau) d\tau - \frac{a_0}{a_2} \int_0^t \int_0^t x(\tau) d\tau^2$$



Derivace na pravé straně

Uvažujme nyní rovnici s derivací na pravé straně

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = b_0 u + b_1 u'$$

Po dvojí integraci a osamostatnění $x(\tau)$ obdržíme

$$x(\tau) = \frac{b_1}{a_2} \int_0^t u(\tau) d\tau + \frac{b_0}{a_2} \int_0^t \int_0^t u(\tau) d\tau^2 - \frac{a_1}{a_2} \int_0^t x(\tau) d\tau - \frac{a_0}{a_2} \int_0^t \int_0^t x(\tau) d\tau^2$$

Program v Turbo Pascalu:

{ odezva soustavy na skok resenim dif. rovnice 2.radu metodou postupne integrace

POZOR na počáteční podmínky}

```

uses crt;
var x,y1,y0,h,u,a2,a1,a0,b0:real;
ip:integer;
begin
clrscr;
writeln('zadej y(0),y'(0)');
read(y0,y1);
writeln('zadej koeficienty a2*y''+a1*y'+a0*y=b0*u');
readln(a2,a1,a0,b0);
u:=1; h:=0.001;
{ vypocet v bode nula}
writeln(0.0:10:2,y1:10:3,y0:10:3);
{ vypocet v dalsich krocich}
ip:=1;x:=0;
{ h integracni krok ip kontrola krokovani tisku}
while x<10 do
begin
ip:=ip+1;
y1:=((-a0/a2*y0+u*b0/a2)*h)+y1; { prvni integrator}
y0:=(y1-a1/a2*y0)*h+y0; { druhy integrator}
if ip=500 then begin
writeln(x:10:2,y1:10:3,y0:10:3);
ip:=1;
end;
x:=x+h; end; end.
```

2.8 Numerické řešení diferenciálních rovnic:

Výpočet diferenciálních rovnic lze provést pomocí Eulerovy metody, modifikované Eulerovy metody, metodou Runge-Kutta, Adamsovou metodou interpolační či extrapolací atd. Uvažujme nejjednodušší metodu - metodu Eulerovu. Nahradíme-li průběh integrační křivky $y(t)$ v bodě $t=0$ tečnou, pak přibližně vyjádření přírůstku funkce $y(1) = y(0) + f(u(0),y(0)).h$, jestliže se $y(t)$ zvětší o h , t.j. $t(1)=t(0)+h$. Jestliže řešíme diferenciální rovnici vyššího řádu, například druhého, pak tuto rovnici nahradíme dvěma rovnicemi prvního řádu, t.j. funkce $y' = z$ a $z' = f(u,z,y)$.

Příklad:

Pro rovnici $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0$ u rozložíme rovnici na tvar dvou rovnic prvního řádu

$$z' = \frac{b_0}{a_2} u - \frac{a_1}{a_2} z - \frac{a_0}{a_2} y$$
$$y' = z.$$

Řešení v Turbo Pascalu:

```
{odezva soustavy na skok resenim dif. rovnice 2.radu metodou Eulerovou}
```

```
uses crt;
var x,z,y,h,u,a2,a1,a0,b0:real;
ip:integer;
begin
  clrscr;
  writeln('zadej y(0),y'(0)');
  read(y,z);
  writeln('zadej koeficienty a2*y''+a1*y'+a0*y=b0*u');
  readln(a2,a1,a0,b0);
  u:=1; h:=0.001; ip:=1;x:=0;
  writeln(x:10:2,z:10:3,y:10:3);
  {h integracni krok ip kontrola krokovani tisku}
  while x<10 do
  begin
    ip:=ip+1; z:=z+h*(0.5*u-1.5*z-0.5*y);
    y:=y+h*z;
    if ip=500 then begin
      writeln(x:10:2,z:10:3,y:10:3);
      ip:=1;
    end;
    x:=x+h;
  end; readln;
end.
```

2.9 Řešení v prostředí MATLAB/Simulink

Jazyk pro technické výpočty MATLAB poskytuje několik standardních funkcí pro řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Základní standardní funkcí je funkce `ode45` pro nonstiff¹ rovnice nebo `ode15s` pro stiff rovnice. Základní syntaxe funkce `ode45` je následující

```
[T,Y] = ode45('navez_funkce',casovy_interval,pocatecni_podminky)
```

kde *navez_funkce* je jméno m-funkce popisující soustavu diferenciálních rovnic. Zadává se buď jméno m-funkce v apostrofech nebo jméno proměnné typu řetězec obsahující název m-funkce. Tato m-funkce musí mít syntaxi

```
dy = navez_funkce(t,y)
```

Výstupní sloupcový vektor *dy* představuje hodnoty derivací pro vektor hodnot *y* v čase *t*. Parametr *casovy_interval* představuje vektor o dvou prvcích – počáteční čas řešení t_0 a konečný čas řešení. Parametr *pocatecni_podminky* představuje vektor počátečních podmínek y_0 takový, že platí $y(t_0)=y_0$. Výstupní parametr *T* - sloupcový vektor – obsahuje časové okamžiky, ve kterých jsou určeny hodnoty řešení *y*. Vlastní řešení je uloženo v matici *Y* – počet řádků odpovídá počtu řádků *T*, počet sloupců odpovídá počtu veličin *y* řešené soustavy.

Jako příklad uveďme řešení rovnice z předcházejícího textu, (kap. 2.6.2), která je upravena do tvaru

$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x - u = 0$, vstupní signál $u = 1$ (jednotkový skok), a počáteční podmínky $x(0) = 0,5$ a $x'(0) = 1$.

Diferenciální rovnici druhého řádu převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu s vyjádřenými derivacemi

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$$

Soustavu můžeme vyjádřit formálně vektorovým zápisem

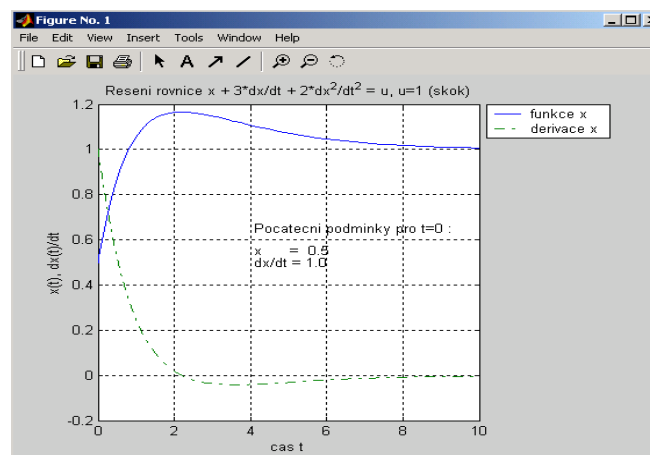
$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(t, x) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix}$$

a v této podobě přepsat do uživatelské funkce `fce_pr12` tak, jak je uvedeno v rámečku

```
function dx=fce_1(t,x)
% Uzivatelska funkce pro ,Zaklady aplikovane
% kybernetiky'
% 2*x'' + 3*x' + x = u, pro u = 1 (jednotkovy skok)
%      dx=fce_1(t,x)
dx=[x(2);(-3/2)*x(2)-(1/2)*x(1)+1/2];
```

pak pro časový interval 0-10 můžeme pro řešení rovnice a vykreslení jejího řešení je možné napsat m-funkci nazvanou např. `difr.m`.

```
% Prikaz pro reseni rovnice
[t,x]=ode45('fce_1',[0,10],[0.5;1.0]);
% Prikazy pro vykresleni funkce x a dx/dt.
%
plot(t,x(:,1),'- ',t,x(:,2),'- ');
title('Reseni rovnice x + 3*dx/dt + 2*dx^2/dt^2 = u, u=1 (skok)')
xlabel('cas t'), ylabel('x(t), dx(t)/dt')
legend('funkce x','derivace x',-1)
text(4.1,0.65,'Pocatecni podminky pro t=0 :')
text(4.1,0.55,'x = 0.5'), text(4.1,0.50,'dx/dt = 1.0'), grid
```



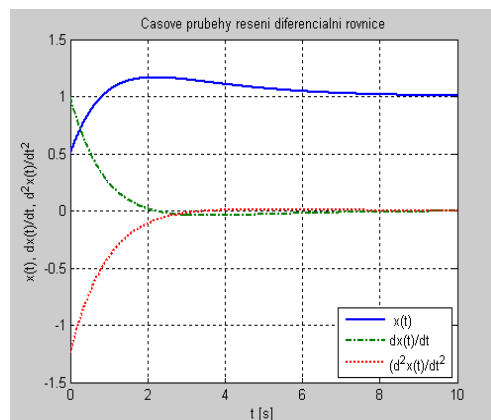
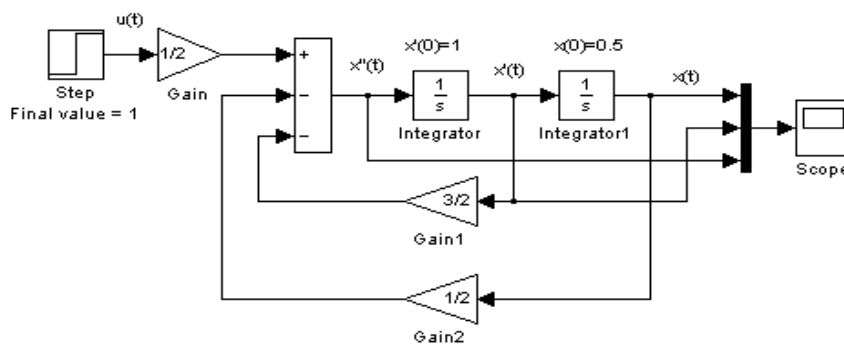
Obr. 2.11 Časový průběh řešení diferenciální rovnice

2.9.1 Vytvoření modelu v programu SIMULINK

V programu Simulink, který využívá algoritmy MATLABu pro numerické řešení diferenciálních rovnic je možno snadno a rychle vytvářet modely dynamických soustav ve formě blokových schémat a rovnic. Pomocí Simulinku a jeho grafického editoru lze modely lineárních, nelineárních, v čase diskretních nebo spojitých systémů navrhovat formou tzv. blokových diagramů, ve kterých jsou modely vytvářené/editované pomocí myši řízených příkazů. Po skončení tvorby zvoleného modelu je možné vykonat analýzu přímo z menu modelu.

Model pro řešení diferenciální rovnice : $2x'' + 3x' + 1x = 1u$, vstupní signál $u = 1$ (skok) a počáteční podmínky $x(0) = 0,5$ a $x'(0) = 1$.

Rovnici upravíme do tvaru : $x'' = \frac{1}{2}u - \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}x$ a vytvoříme blokový diagram.

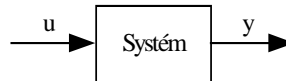


Pozn.:
 Blokový diagram řešení rovnice byl doplněn blokem **To Workspace (simout)** z knihovny Simulink/Sinks, a graf vykreslen s využitím příkazu **Plot**.

Obr. 2.12 Blokový diagram řešení diferenciální rovnice a časové průběhy.

3. Popis dynamických vlastností systémů

Uvažujme systém s jedním vstupem a jedním výstupem a znázorníme jej obdélníkovým blokem, v němž si představujeme soustředěny jeho dynamické vlastnosti.



Poznamenejme, že při řešení úloh z automatického řízení se setkáváme s tím, že řešíme dynamické vlastnosti regulačního obvodu, ve kterém je několik takových systémů, minimálně regulovaná soustava a regulátor vyjádřený každý jedním blokem, které jsou spolu určitým způsobem propojeny.

Vnější popis systému

Vyjadřuje dynamické vlastnosti reakcí mezi vstupem a výstupem soustavy a může být prezentován ve tvaru

- lineární diferenciální rovnice
- přechodovou funkcí a přechodovou charakteristikou systému
- impulzovou funkcí a impulzovou charakteristikou systému
- frekvenčním přenosem systému a frekvenční charakteristikou (v komplexní rovině nebo v logaritmických souřadnicích)
- polohou nul a pólů přenosu systému
- přenosem systému (v Laplaceově transformaci)

Vnitřní popis systému

Vyjadřuje dynamické vlastnosti reakcí mezi vstupem, vnitřním stavem a výstupem systému.

3.1 Vnější popis systému

Popis systému lineární diferenciální rovnicí

Chování spojitého systému s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou lze popsat lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty ve tvaru

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

kde $u(t)$ je vstupní veličina

$y(t)$ je výstupní veličina

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti musí platit, že $m \leq n$. Řád diferenciální rovnice n určuje řád systému.

3.1.1 Přenos systému

Je definován jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách systému a vstupního signálu. Použitím Laplaceovy transformace za předpokladu nulových počátečních podmínek lze psát

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = [b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0] U(s)$$

Přenos systému má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Přenos může být vyjádřen pomocí záporně vzatých nul (kořeny čitatele) a pólů (kořeny jmenovatele).

$$G(s) = \frac{b_m \cdot (s - n_1) \dots (s - n_m)}{a_n \cdot (s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

Záporně vzaté převrácené hodnoty reálných pólů a nul nazýváme časové konstanty a přenos pak lze (pro reálné nuly a póly) zapsat ve tvaru

$$G(s) = \frac{b_0 \cdot (1 - \tau_1 s)(1 - \tau_2 s) \dots (1 - \tau_m s)}{a_0 \cdot (1 - sT_1)(1 - sT_2) \dots (1 - sT_n)}$$

Poměr $\frac{b_0}{a_0} = k_0$ se nazývá zesílením systému.

Originál odezvy získáme ze vztahu

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\}.$$

Příklad: Chování lineárního spojitého systému je popsáno rovnicí

$$3y'''(t) + 27y''(t) + 78y'(t) = 2u''(t) + 10u'(t) + 12u(t)$$

Počáteční podmínky systému jsou nulové:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Vstupní signál $u(t)$ má hodnoty $u(0) = u'(0) = 0$.

Vyjádříme přenos ve tvaru racionální funkce lomené, dále ve tvaru přenosu s vyjádřenými póly a nulami a ve tvaru přenosu s časovými konstantami. Určíme i zesílení systému.

Laplaceovou transformací diferenciální rovnice a její úpravou získáme přenos ve tvaru racionální funkce lomené

$$L\{3y'''(t) + 27y''(t) + 78y'(t) + 72y(t)\} = L\{2u''(t) + 10u'(t) + 12u(t)\}$$

$$(3s^3 + 27s^2 + 78s + 72)Y(s) = (2s^2 + 10s + 12)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 10s + 12}{3s^3 + 27s^2 + 78s + 72} = \frac{2}{3} \cdot \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Řešením polynomu čitatele $s^2 + 5s + 6 = 0$

určíme kořeny čitatele (nuly přenosu): $n_1 = -2, n_2 = -3$.

Řešením polynomu jmenovatele $s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = 0$

určíme kořeny jmenovatele (póly přenosu): $s_1 = -2, s_2 = -3, s_3 = -4$.

Přenos s vyjádřenými póly a nulami, tj. s polynomem čitatele i jmenovatele vyjádřenými ve tvaru součinu kořenových činitelů má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{3} \frac{(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Přenos ve tvaru s časovými konstantami získáme z přenosu s vyjádřenými póly a nulovými body tím, že vytkneme z každé závorky hodnotu příslušného pólu nebo nulového bodu

$$G(p) = \frac{2}{3} \frac{2\left(\frac{1}{2}s+1\right) \cdot 3\left(\frac{1}{3}s+1\right)}{2\left(\frac{1}{2}s+1\right) \cdot 3\left(\frac{1}{3}s+1\right) 4\left(\frac{1}{4}s+1\right)} = \frac{12}{72} \frac{(0,5s+1)(0,33s+1)}{(0,5s+1)(0,33s+1)(0,25s+1)}$$

Zesílení systému bude $k_0 = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$.

Řešení v MATLABu :

prenos.m

% Chovani systemu je dano rovnicí:

% $3y'''(t) + 27y''(t) + 78y'(t) + 72y(t) = 2u'' + 10u'(t) + 12u(t)$

% Pocatecni podminky systemu jsou nulove: $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0; u(0) = u'(0) = 0$

% Vyjadreni prenosu:

% a) ve tvaru racionalni lomene funkce, b) ve tvaru prenosu s vyjadrenymi poly a nulami.

den=[3,27,78,72];

% Zadani jmenovatele prenosu

num=[2,10,12];

% Zadani citatele prenosu.

Gs=tf(num,den)

% Vyjadreni obrazoveho prenosu.

[n,p,k]=tf2zp(num,den)

% Vypocet nul a polu prenosu.

Transfer function:

$$\frac{2s^2 + 10s + 12}{3s^3 + 27s^2 + 78s + 72}$$

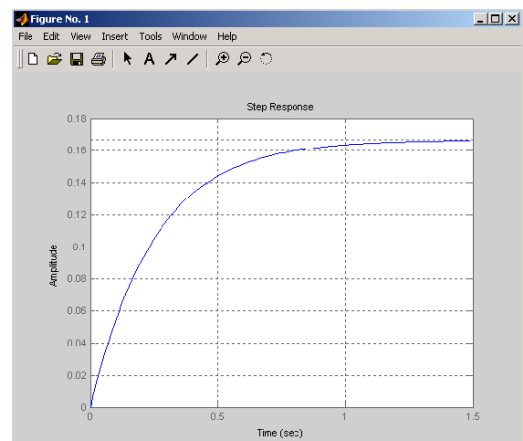
$$3s^3 + 27s^2 + 78s + 72$$

Přenos ve tvaru racionální lomené funkce

n =

-3.0000

Kořeny čitatele (nuly přenosu)

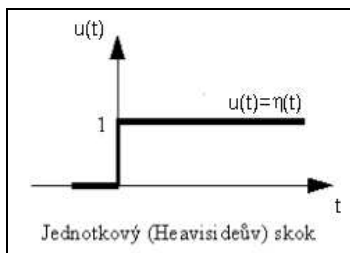


-2.0000
 p = Kořeny jmenovatele (póly přenosu)
 -4.0000
 -3.0000
 -2.0000
 k =
 0.6667

Přenos $G(s)$ vyjádřený pomocí záporně vzatých nul a pólů bude

$$G(s) = k \frac{(s-n_1)\dots(s-n_m)}{(s-p_1)\dots(s-p_n)} = 0,6667 \frac{(s+3)(s+2)}{(s+4)(s+3)(s+2)}$$

3.1.2 Přechodová funkce



Přechodová funkce - označená $h(t)$ - je odezva na jednotkový skok při nulových počátečních podmínkách systému. Přechodová charakteristika je grafické znázornění této funkce.

Laplaceův obraz jednotkového skoku je $L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}$

Obraz přechodové funkce je $L\{h(t)\} = H(s)$.

Hodnota přechodové funkce pro $t \rightarrow \infty$ je rovna $h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

Z tohoto hlediska rozpoznáváme tři základní skupiny dynamických členů

- proporcionální (statické) - $h(\infty) = b_0/a_0$
- derivační - $h(\infty) = 0$
- integrační (astatické) - $h(\infty) = \infty$.

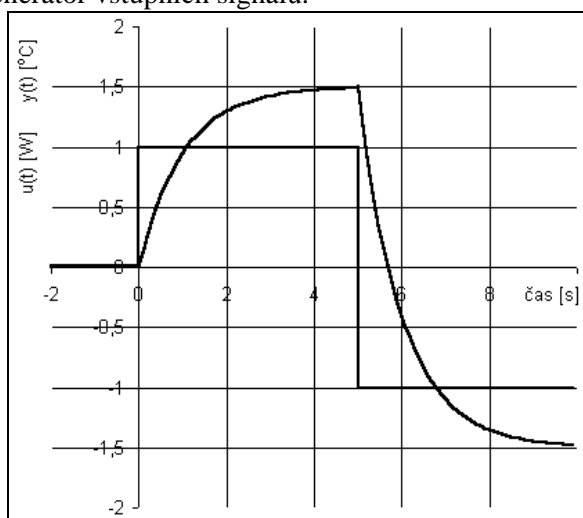
Řešení v MATLABu :

```
% Prechodova funkce - odezva obrazoveho prenosu na jednotkovy skok.
% Chovani systemu je dano rovnici:
% 3y'''(t) + 27y''(t) + 78y'(t) + 72y(t) = 2u'' + 10u'(t) + 12u(t)
% Pocatecni podminky systemu jsou nulove,(p.p.=0) zleva.
%
den=[3,27,78,72]; % Zadani jmenovatele prenosu
num=[2,10,12]; % Zadani citatele prenosu.
Gs=tf(num,den) % Vyjadreni obrazoveho prenosu.
syms s t; % Funkce pro praci s neurcitymi koeficienty.
% Inverzni Laplaceova funkce.
ilaplace((2*s^2+10*s+12)/(3*s^3+27*s^2+78*s+72)*1/s)
step(Gs),grid % Odezva obrazoveho prenosu na jednotkovy skok.
[x,t]=step(Gs); % Vycisleni konkretnich hodnot v zavislosti na case.
Numericke_vyjadreni=[x,t]
Transfer function:
 2 s^2 + 10 s + 12
-----
3 s^3 + 27 s^2 + 78 s + 72
ans =
1/6-1/6*exp(-4*t)
Numericke_vyjadreni =
```

0	0
0.0090	0.0128
0.0174	0.0276
0.0254	0.0414
0.0330	0.0552
0.0402	0.0690
0.0470	0.0828
0.0534	0.0966
0.0595	0.1104
0.0653	0.1242

3.1.3 Určení souřadnic přechodové charakteristiky měřením

Měření přechodových charakteristik je velmi často používaným prostředkem ke zjišťování dynamických vlastností soustavy. Měřením se zjišťuje odezva $y(t)$ soustavy při změně vstupního signálu $u(t)$ skokem známé velikosti. Před provedením změny vstupního signálu musí být soustava v ustáleném stavu. Vstupují-li do soustavy další signály $u_i(t)$, $i=2,3...K$, je třeba je udržovat po celou dobu měření na konstantní hodnotě. Je účelné měření několikrát opakovat a pro vyhodnocení dynamických vlastností soustavy používat průměrných hodnot, nebo provést vyhodnocení všech zdařilých měření a pak určit výsledné hodnoty přechodové charakteristiky. Při měření přechodových charakteristik se vystačí s jednoduchým měřicím zařízením a není nutný žádný generátor vstupních signálů.



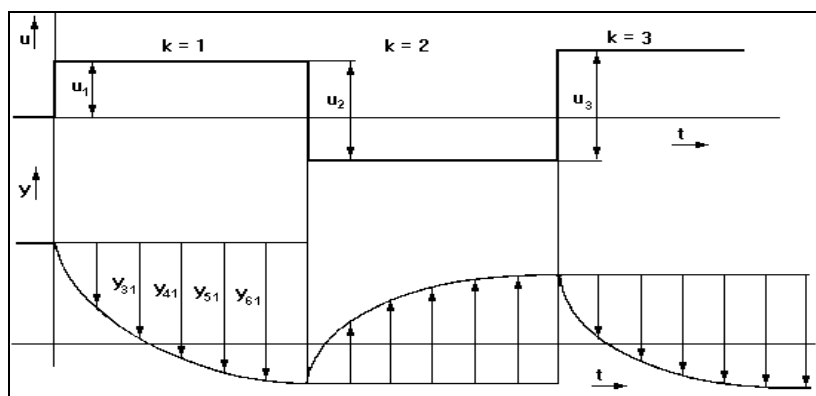
Obr. 3.1a Výpočet přechodové charakteristiky z odezvy na skok

Při výpočtu přechodové charakteristiky (odezvy na jednotkový skok) z několika naměřených odezvy (na skok libovolné velikosti), je možno použít při obecně nestejně velkých skokových změnách vstupní veličiny vztahu

$$h(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{y(i,k)}{\Delta u(k)} \quad (3.1a)$$

V případě jen jednoho skoku, obecně různého od jednotkového skoku, se tvar uvedeného vztahu (3-1a) zapíše ve tvaru

$$h(i) = \frac{y(i)}{\Delta u} \quad (3.1b)$$



Obr. 3.1b Schéma výpočtu přechodové charakteristiky z odezvy na skok

kde

$h(i)$ je hodnota přechodové charakteristiky v čase $t = i \cdot \Delta t$,

$\Delta u(k)$ skoková změna vstupního signálu při k -tém měření přechodové charakteristiky,

$y(i, k)$ odezva výstupní veličiny soustavy v i -tém intervalu vzorkování při k -tém měření, $i=0,1,2,\dots,N$,

M počet skokových změn a odpovídajících odezev,

N počet vzorků jednotlivých odezev na skokový signál.

3.1.4 Impulzní funkce a impulzní charakteristika

Impulzní funkce a impulzní charakteristika - označovaná jako $g(t)$ - je odezva na jednotkový (Diracův) impulz při nulových počátečních podmínkách systému. Impulzní charakteristika je grafické znázornění impulzní funkce. Diracův impulz je fyzikálně nerealizovatelná funkce, definovaná vztahem

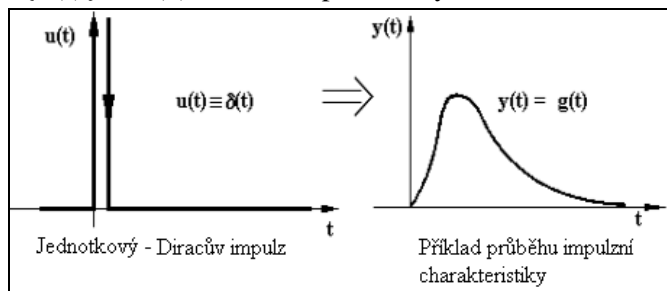
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \delta(t) = 0 \text{ pro } t \neq 0.$$

Laplaceův obraz Diracova impulzu je

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

Obraz impulzní charakteristiky je

$$L\{g(t)\} = G(s) \cdot L\{\delta(t)\} = G(s) \text{ a rovná se přenosu systému.}$$



Poznámka:

Mezi obrazem přechodové funkce $H(s)$ a obrazem impulzní funkce $G(s)$ platí vztah

$$H(s) = \frac{G(s)}{s}$$

ze kterého vyplývají následující vztahy

$$h(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau, \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Pro vzájemný převod přechodové a impulzní charakteristiky lze použít numerické integrace a derivace.

Řešení v MATLABu :

% Impulzova funkce – odezva obrazového přenosu na jednotkový impulz.

% Chování systému je dáno rovnicí:

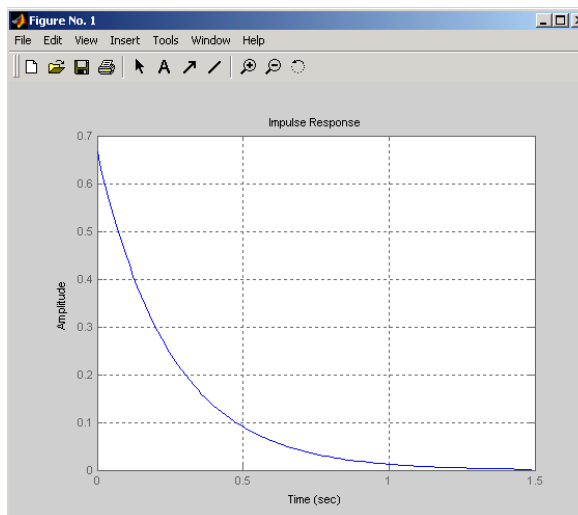
% $3y'''(t) + 27y''(t) + 78y'(t) + 72y(t) = 2u'' + 10u'(t) + 12u(t)$

% Počáteční podmínky systému jsou nulové, (p.p.=0) zleva.

```

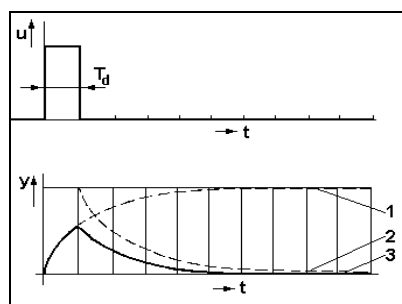
den=[3,27,78,72];           % Zadani jmenovatele prenosu
num=[2,10,12];             % Zadani citatele prenosu.
Gs=tf(num,den)             % Vyjadreni obrazoveho prenosu.
syms s t;                  % Funkce pro praci s neurcitymi koeficienty.
ilaplace((2*s^2+10*s+12)/(3*s^3+27*s^2+78*s+72))
impulse(Gs),grid,
[x,t]=impulse(Gs);
Numericke_vyjadreni=[x,t]
Transfer function:
  2 s^2 + 10 s + 12
-----
 3 s^3 + 27 s^2 + 78 s + 72
ans =
  2/3*exp(-4*t)
Numericke_vyjadreni =
  0.6667    0
  0.6309    0.0128
  0.5970    0.0276
  0.5649    0.0414
  0.5346    0.0552
  0.5058    0.0690
  0.4787    0.0828
  0.4530    0.0966
  0.4286    0.1104
  0.4056    0.1242
  .....

```



3.1.5 Určení souřadnic impulzní charakteristiky měřením

Dalším používaným vstupním signálem je pravoúhlý impulz. Pod tímto pojmem rozumíme změnu vstupní veličiny konečné šířky (konečné doby trvání T_d). Tento impulz označený v obr. 3.1c jako 3 si můžeme představit jako dva po sobě následující skoky, označené v obr. 3.1c jako 1, 2 s časovým odstupem T_d . Požadavky při měření jsou stejné jako při zjišťování odezvy na skok, metoda určení odezvy na impulz, i když je experimentálně náročnější, má přednost v tom, že zásah do provozu je při stejné výšce vstupního signálu podstatně menší. Ve většině případů není splněna podmínka, že plocha impulzu je rovna jedné, pak dostačuje odezvu podělit velikostí plochy, výsledná charakteristika je pak impulzní charakteristikou. Při výpočtu impulzní charakteristiky lze tedy použít vztahů (3.1a) a (3.1b), kdy skokové změny jsou nahrazeny impulzem a v uvedených vztazích Δu nahradíme $u \cdot T_d$. Dalším problémem je to, že impulzní charakteristika prvního řádu se tímto přístupem určí jako impulzní charakteristika druhého řádu.



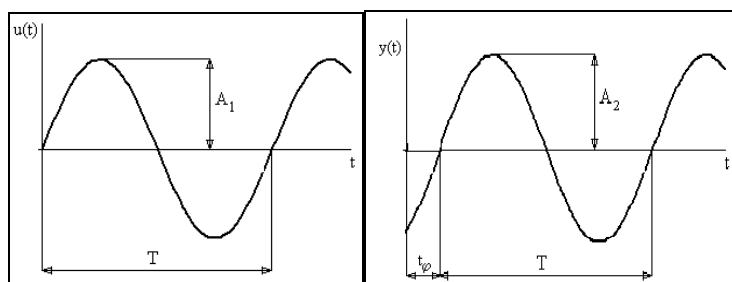
3.1c Určení impulzní charakteristiky -3 na impulz tj. skok 1 a 2

3.1.6 Frekvenční přenos

Frekvenční přenos $G(j\omega)$ je definován poměrem vektoru odezvy k vektoru harmonického budícího (vstupního) signálu v ustáleném stavu po odeznění přechodového děje.

Vstupní funkcí je $u(t) = A_1 \sin \omega t$.

Výstupní funkcí je $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$ se stejnou frekvencí, ale s jinou amplitudou A_2 a s fázovým posunutím φ .



Harmonickou funkci můžeme pomocí Eulerova vztahu vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = A_1 e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{y}(t) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

To jsou v komplexní rovině vektory, které se otáčejí úhlovou rychlostí ω . Poměr těchto vektorů nám definuje frekvenční přenos

$$G(j\omega) = \frac{\mathbf{y}(t)}{\mathbf{u}(t)} = \frac{A_2 e^{j(\omega t + \varphi)}}{A_1 e^{j\omega t}} = \frac{A_2}{A_1} e^{j\varphi} = A e^{j\varphi}$$

kde $A = A_2/A_1$ je poměr amplitud - modul
 φ je fázové posunutí - argument
 ω je kruhový kmitočet $\omega = 2\pi / T$ [rad/s].

Ukažme nyní souvislost diferenciální rovnice a frekvenčního přenosu. Vyjděme z obecného tvaru diferenciální rovnice systému

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_2 u''(t) + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

a dosadíme do ní za vstupní a výstupní veličinu harmonické kmity v komplexním tvaru i s příslušnými derivacemi dostáváme důležitý vztah, umožňující převádět diferenciální rovnici systému na frekvenční přenos a naopak

$$G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0}$$

Příklad: Systém je popsán diferenciální rovnicí $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = u' + 0,1u$.

Jeho přenos má tvar $G(j\omega) = \frac{j\omega + 0,1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 j\omega + 4}$.

Frekvenční přenos lze definovat také jako podíl Fourierova obrazu výstupní veličiny systému a Fourierova obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

Takto definovaný frekvenční přenos je obecnější, než předchozí definice. Nepředpokládá vstupní ani výstupní funkci sinusovou či harmonickou.¹²

Máme-li k dispozici impulzní funkci, můžeme její Fourierovou transformací získat frekvenční přenos

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

3.1.7 Frekvenční charakteristika

Frekvenční charakteristika je grafické vyjádření frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ v komplexní rovině, když za úhlovou frekvenci ω vložíme hodnoty 0 až ∞ .

¹² Odvození obou případů je možno nalést například v Švarc I., 2007, Balda M., 1969

Příklad: Sestrojme frekvenční charakteristiku statické soustavy 1. řádu, která je popsána frekvenčním přenosem

$$G(j\omega) = \frac{A}{1 + jT\omega}$$

pro $A = 0,2$ a $T = 40$ s. Přenos si upravíme např. vynásobením čitatele i jmenovatele komplexně sdruženým číslem ke komplexnímu číslu ve jmenovateli:

$$G(j\omega) = \frac{0,2}{1 + 40j\omega} \cdot \frac{1 - 40j\omega}{1 - 40j\omega} = \frac{0,2}{1 + 1600\omega^2} - j \cdot \frac{8\omega}{1 + 1600\omega^2}$$

Je tedy v našem případě

$$P(\omega) = \frac{0,2}{1 + 1600\omega^2} \quad Q(\omega) = -\frac{8\omega}{1 + 1600\omega^2}$$

Určíme body frekvenční charakteristiky pro $\omega = 0$ a $\omega \rightarrow \infty$:

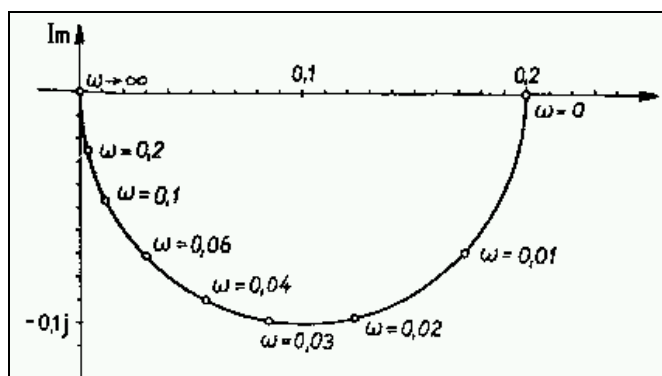
$$P(\omega)_{\omega=0} = 0,2 \quad Q(\omega)_{\omega=0} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} Q(\omega) = 0$$

Hodnoty pro ostatní frekvence ω_i , kde $0 < \omega_i < \infty$ musíme počítat; pro zvolená ω_i jsou uvedeny v následující tabulce.

$\omega[s^{-1}]$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,1
$P(\omega)$	0,2	0,172	0,122	0,084	0,056	0,029	0,012
$Q(\omega)$	0	-0,069	-0,098	-0,098	-0,090	-0,071	-0,047

Z těchto bodů je sestrojena frekvenční charakteristika na následujícím grafu



Je možný jiný způsob výpočtu frekvenční charakteristiky z exponenciálního tvaru komplexního čísla

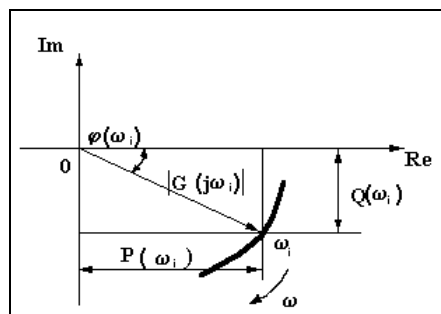
$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

kde $A(\omega)$ je modul resp. amplituda frekvenčního přenosu,

$$A(\omega) = \text{mod } G(j\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$\varphi(\omega)$ - argument resp. fáze frekvenčního přenosu

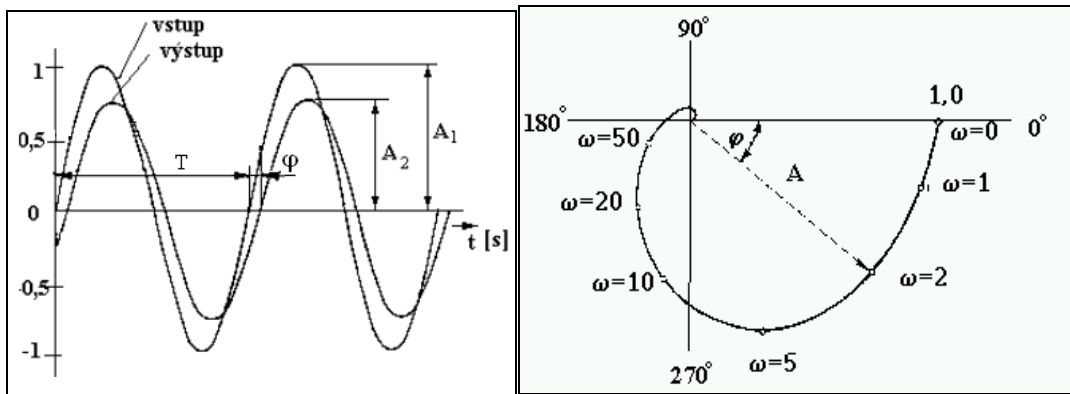
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



3.1.8 Určení frekvenční charakteristiky měřením

Postup při experimentálním stanovení frekvenční charakteristiky je následující:

- Na vstup systému přivedeme sinusový signál o zvolené frekvenci $u=A_1\sin\omega t$.
- Pro ustálený výstupní signál $y=A_2\sin(\omega t+\varphi)$ zjistíme A_2 a φ (v obloukové míře, tedy $\varphi=\varphi^\circ\cdot\pi/180$).
- Z definice frekvenčního přenosu $G(j\omega) = \frac{A_2 e^{j(\omega t+\varphi)}}{A_1 e^{j\omega t}} = \frac{A_2}{A_1} e^{j\varphi}$ zjistíme pro zvolené ω jeden bod frekvenční charakteristiky.



Řešení v MATLABu :

% Frekvencni charakteristika staticke soustavy 1. radu popsane frekvencnim prenosem.

% $G(j\omega) = A / (1+j\alpha\omega)$; $A = 0.2$; $\alpha = 40$ sec.

%

num=[0.2];

% Zadani citatele prenosu.

den=[40,1];

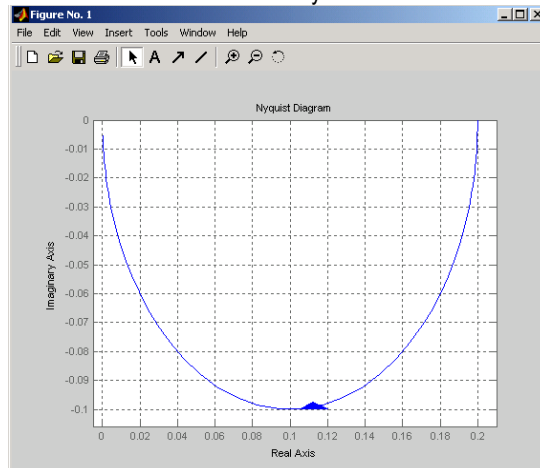
% Zadani jmenovatele prenosu

Gs=tf(num,den);

% Vyjadreni obrazoveho prenosu.

nyquist(Gs),grid;

% Vykresleni frekvencni charakteristiky



Poznámka: Matlab neumí převést obrazový přenos teoreticky, pouze umožňuje zobrazit graficky pomocí funkce NYQUIST.

Příklad: Sestrojme frekvenční charakteristiku soustavy, jejíž frekvenční přenos má tvar

$$G(j\omega) = \frac{1}{a_1 j\omega} = \frac{1}{a_1 j\omega} \cdot \frac{a_1 j\omega}{a_1 j\omega} = -j \frac{1}{a_1 \omega}$$

Řešení v MATLABu :

% Frekvencni charakteristika soustavy která je popsana frekvencnim prenosem $G(j\omega) = 1 / a_1 j\omega$

% $a_1 = 2$,

% Zadani jmenovatele prenosu

den=[1];

% Zadani citatele prenosu.

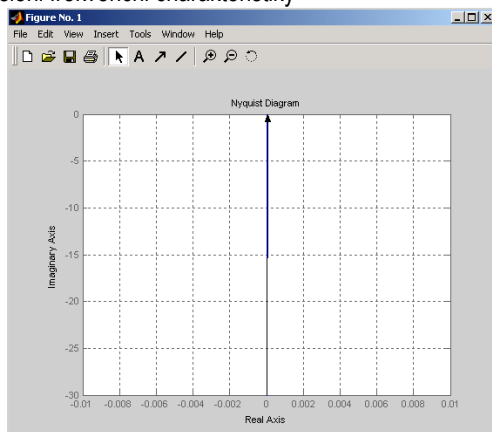
num=[2,0];

% Vyjadreni obrazoveho prenosu.

Gs=tf(num,den)

nyquist(Gs),grid,

% Vykreslení frekvenci charakteristiky



Příklad: Určeme výslednou frekvenci charakteristiku pro dva sériově zapojené členy $G_1(j\omega)$ a $G_2(j\omega)$.

Výsledný přenos tohoto zapojení je $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$

a dále platí

$$G_1 = P_1 + jQ_1$$

a) $G_2 = P_2 + jQ_2$

$$G = (P_1 + jQ_1)(P_2 + jQ_2) = P_1P_2 - Q_1Q_2 + j(P_1Q_2 + P_2Q_1) = P + jQ$$

nebo

b) $G = F_1 e^{j\varphi_1} \cdot F_2 e^{j\varphi_2} = F_1 F_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Řešení v MATLABu :

Výsledná frekvenci charakteristika pro dva sériově zapojené členy $G_1(s)$ a $G_2(s)$. %

% $G_1(s) = 0.2 / (40s+1)$; $G_2(s) = 2s^2+10s+12 / 3s^3+27s^2+78s+72$

%

num_1=[0.2]; % Zadání čitatele přenosu.

den_1=[40,1]; % Zadání jmenovatele přenosu

Gs_1=tf(num_1,den_1); % Vyjádření obrazového přenosu.

num_2=[2,10,12];

den_2=[3,27,78,72];

Gs_2=tf(num_2,den_2);

Gs=series(Gs_1,Gs_2) % Sériově zapojení přenosu Gs_1, Gs_2

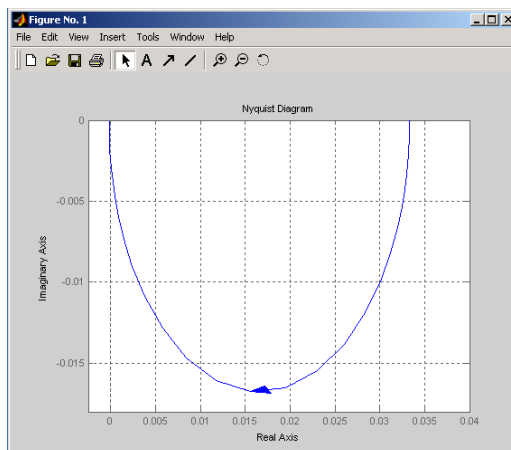
nyquist(Gs),grid, % Vykreslení frekvenci charakteristiky.

Transfer function:

$$0.4 s^2 + 2 s + 2.4$$

$$120 s^4 + 1083 s^3 + 3147 s^2 + 2958 s + 72$$

>>



3.1.9 Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

Frekvenční přenos

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

lze logaritmovat:

$$\log G(j\omega) = \log A(\omega) + j\varphi(\omega) = \log|G(j\omega)| + j \arg G(j\omega)$$

Přenos v logaritmických souřadnicích můžeme vyjádřit dvěma charakteristikami:

- logaritmickou amplitudovou charakteristikou

$$\log|G(j\omega)| = f(\log \omega)$$

- logaritmickou fázovou charakteristikou

$$\varphi(\omega) = f(\log \omega).$$

Pro vodorovnou osu vynáší logaritmus úhlového kmitočtu ω , tj. $\log \omega$ ¹³, a na osu pořadnic amplitudové charakteristiky se vynáší absolutní hodnota frekvenčního přenosu v decibelech, což jsou jednotky definované jako dekadický logaritmus poměru obrazu výstupního a vstupního signálu násobeného dvaceti, tj.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|G(j\omega)|$$

Význam zavedení logaritmických frekvenčních charakteristik spočívá ve zjednodušení výpočtů charakteristik složených systémů a v jejich jednoduchém sestrojování. Násobení přenosů při sériovém zapojení systémů se totiž v logaritmických charakteristikách zjednodušuje na sčítání charakteristik, protože např. pro přenos

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\varphi_2(\omega)} = \\ &= |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot e^{(\varphi_1+\varphi_2)(j\omega)} \end{aligned}$$

platí

$$20 \log|G(j\omega)| = 20 \log|G_1(j\omega)| + 20 \log|G_2(j\omega)|$$

a $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$.

Přenos lineárních systémů má v čitateli i jmenovateli mnohočleny, které lze napsat jako kořeny součinných činitelů, ve kterých jsou nuly i póly vyjádřené pomocí časových konstant, např.

$$G(s) = k_0 \frac{(1 + sT_1)}{s(1 + sT_2)^2(1 + 2\xi sT_3 + s^2T_3^2)} \quad (3.1)$$

Při kreslení logaritmické amplitudové charakteristiky se výsledný přenos rozdělí na sériové zapojení dílčích přenosů.

a) přenos typu $G(s) = k_0$

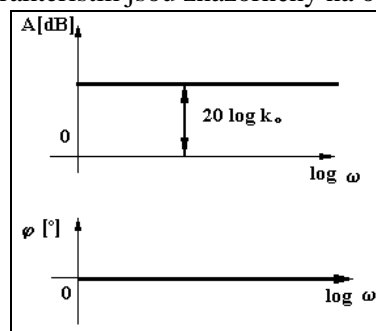
Amplitudová logaritmická charakteristika

$$A[dB] = 20 \log k_0 = \text{konst.}$$

je konstantou nezávislou na úhlovém kmitočtu a tedy fázová logaritmická charakteristika bude

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0.$$

Průběhy obou logaritmických charakteristik jsou znázorněny na obr. 3.1.



Obr. 3.1

b) Přenos typu $G(s) = (1 + sT)$

Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika

¹³ V rámci této publikace dodržujeme označení vodorovné osy $\log \omega$ podle Balátě J., 2004.

$$A[dB] = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (3.2)$$

je závislá na úhlovém kmitočtu. Její průběh určují dvě přímkové asymptoty, jejichž průsečíkem je tzv. lomový úhlový kmitočet

$$\omega = \frac{1}{T} [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}].$$

Pro $\omega < 1/T$ platí, že $\omega T < 1$ a tím i $\omega^2 T^2 \ll 1$.

Proto můžeme člen $\omega^2 T^2$ ve výrazu pro tuto oblast úhlového kmitočtu zanedbat a dostaneme pro průběh charakteristiky výraz

$$A[dB] = 20 \log 1 = 0,$$

který představuje nezávislost na úhlovém kmitočtu a tedy přímkou - první asymptotu - totožnou s osou ω (sklon 0 dB/dek).

Pro $\omega > 1/T$ platí, že $\omega T > 1$ a tím i $\omega^2 T^2 \gg 1$. Zde můžeme zanedbat i jedničku ve výrazu a dostaneme pro průběh charakteristiky vztah

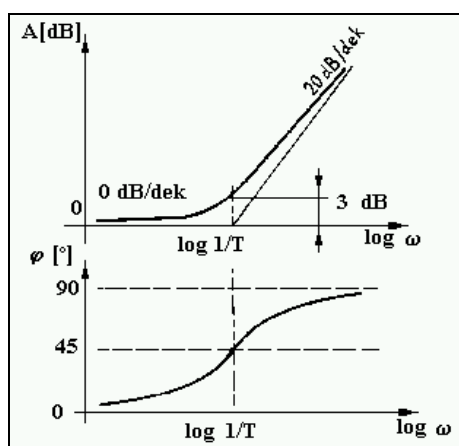
$$A[dB] = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 20 \log \omega T = 20 \log \omega + 20 \log T \quad (3.3)$$

Uvažujeme-li jednu dekádu úhlového kmitočtu, např. $1 \leq \omega \leq 10$ a dosadíme-li do předchozího vztahu 3.3 krajní hodnoty tohoto intervalu ω , dostaneme

$$\text{pro } \omega = 1: \quad A[dB] = 20 \log 1 + 20 \log T = 20 \log T$$

$$\text{pro } \omega = 10: \quad A[dB] = 20 \log 10 + 20 \log T = 20 + 20 \log T,$$

což vyjadřuje sklon přímkou - druhé asymptoty + 20 dB/dek.



Obr. 3.2

Polopřímky o sklonech 0 dB/dek a 20 dB/dek nazýváme asymptotami, protože skutečný průběh amplitudové logaritmické charakteristiky se k těmto polopřímkám asymptoticky blíží (obr. 3.2). Pro úhlový kmitočet $\omega = 1/T$ (bod lomu asymptot) je rozdíl mezi skutečným průběhem charakteristiky a její aproximací asymptotami největší, protože výraz $(\omega T)^2 = 1$. Proto zanedbáním kterékoli části pod odmocninou výrazu 3.2 vzniká stejná chyba. Výpočtem můžeme stanovit tuto chybu:

$$\Delta A[dB] = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 20 \log \sqrt{1 + 1} = 3 \text{ dB}.$$

Logaritmickou fázovou charakteristiku sestrojíme podle vztahu

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T,$$

kde pro $\omega T \ll 1$ bude $\varphi(\omega) = 0^\circ$,

pro $\omega T \gg 1$ bude $\varphi(\omega) = +90^\circ$.

Průběh je zřejmý z obr. 3.2, inflexní bod charakteristiky je v bodě lomového úhlového kmitočtu $\omega = 1/T$.

$$\text{c) Přenos typu } G(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika je dána výrazem

$$A[dB] = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Její průběh je znázorněn na obr. 3.3

Rozdíl proti průběhu na obr. 3.2 je v záporné směrnici asymptoty, tj. -20 dB/dek a v záporných hodnotách chyb aproximace skutečného průběhu asymptotami.

Logaritmickou fázovou charakteristiku sestrojíme podle vztahu $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$,

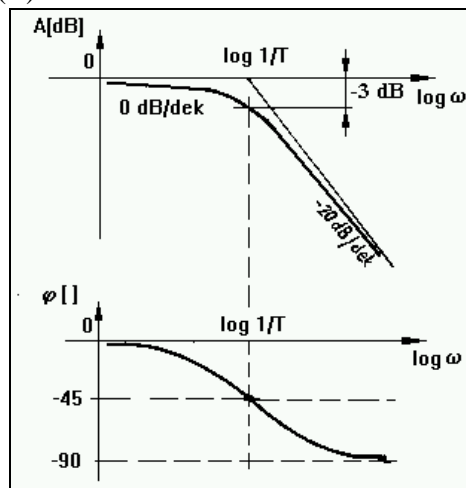
kde pro $\omega T \ll 1$ bude $\varphi(\omega) = 0^\circ$,
pro $\omega T \gg 1$ bude $\varphi(\omega) = -90^\circ$

jak je zřejmé z obr. 3.3.

Poznámka: Pokud by polynom přenosu $G(s)$ obsahoval násobný reálný kořen, např.

$$G(s) = \frac{1}{(1 + sT)^2}$$

bude rozdíl v porovnání s průběhy charakteristik v obr. 3.3 u amplitudové logaritmické frekvenční charakteristiky spočívat v tom, že sklon asymptoty bude -40 dB/dek a u fázové logaritmické charakteristiky v tom, že pro $\omega T \gg 1$ bude $\varphi(\omega) = -180^\circ$.



Obr. 3.3

d) Přenos typu $G(s) = \frac{1}{[1 + 2\xi sT + (sT)^2]}$

Jde o případ, kdy jmenovatel přenosu $G(s)$ obsahuje pár komplexně sdružených kořenů, kde značí

$T = \frac{1}{\omega}$ - časovou konstantu proporcionálního prvku se setrvačností 2. řádu

ω - úhlový kmitočet netlumených kmitů (přirozený kmitočet),

ξ - koeficient poměrného tlumení.

Logaritmická amplitudová charakteristika má dvě asymptoty s průsečíkem v $\omega=1/T$ jako u složky příslušné reálnému kořenu (0 dB/dek), sklon druhé asymptoty je však dvojnásobný (40 dB/dek).

Představuje-li však komplexní funkce

$$G(s) = \frac{1}{[1 + 2\xi sT + (sT)^2]}$$

přenos soustavy druhého řádu, pak činitel ξ reprezentuje velikost tlumení. Podle velikosti ξ se charakteristika více či méně odchyluje od asymptot.¹⁴

e) Přenos typu $G(s) = \frac{k_0}{s}$

V tomto případě má přenos nulový pól. Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika je popsána vztahem

¹⁴ Například pro $\xi=0$ není žádné tlumení a amplituda dosahuje nekonečných hodnot. Pro $\xi=1$ je frekvenční přenos ve tvaru $G(s) = \frac{1}{[1 + i\omega T]^2}$ a pro $\xi>1$ je přenos ve tvaru $G(s) = \frac{1}{[T_1 s + 1][T_2 s + 1]}$. Blíže je možno

se s daným problémem seznámit například v Hanuš B., 1969.

$$A[\text{dB}] = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{k_0}{j\omega} \right| = 20 \log \frac{k_0}{\omega} = 20 \log k_0 - 20 \log \omega$$

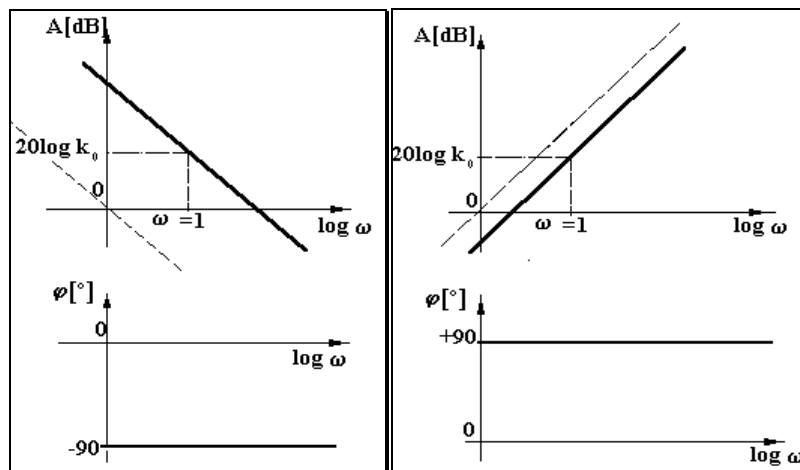
Je to přímka se sklonem -20 dB/dek (obr. 3.4), jak plyne z výpočtu:

pro $\omega = 1$: $A[\text{dB}] = 20 \log k_0 - 20 \log 1 = 20 \log k_0$

pro $\omega = 10$: $A[\text{dB}] = 20 \log k_0 - 20 \log 10 = 20 \log k_0 - 20$.

Logaritmická fázová charakteristika je konstantní (obr. 3.4).

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -\arctg \infty = -\frac{\pi}{2}$$



Obr. 3.4

Obr.3.5

Poznámka: Logaritmická frekvenční charakteristika přenosu $G(s) = k_0 s$ bude mít obdobný charakter jako na obr. 3.5. Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika je dána vztahem

$$A[\text{dB}] = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |k_0 j\omega| = 20 \log k_0 \omega = 20 \log k_0 + 20 \log \omega$$

a logaritmická fázová charakteristika je konstantní

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = +\arctg \infty = +\frac{\pi}{2}$$

Rozdíl spočívá ve sklonu amplitudové charakteristiky (+20 dB/dek) a v poloze fázové charakteristiky ($\varphi(\omega) = +90^\circ$).

Pro sestavení výsledné logaritmické frekvenční charakteristiky pro přenos $G(s)$ daný výrazem (3.1) se budeme řídit postupem:

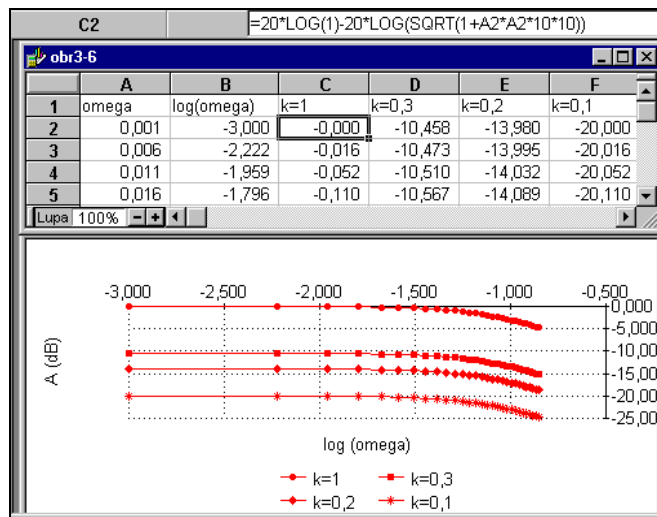
Pro jednoduchost označíme časové konstanty T_1, T_2, T_3 od jejich největších hodnot k nejmenším, tj. $T_1 > T_2 > T_3$,

potom když platí, že $\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \omega_2 = \frac{1}{T_2} \dots$ bude $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

V těchto úhlových kmitočtech nastává lom asymptot. Potom amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika je určena dříve uvedenými výrazy.

Příklad: Vliv zesílení K pro $G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$

$$\log G(j\omega) = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1 + \omega^2 T^2})$$



Řešení v MATLABu :

% Amplitudova frekvencni charakteristika v log. souradnicich.

% Vliv zesileni K pro G(s)=K/(1+sT); T =10

%

G1=tf([0.1],[10,1]); % k=0.1

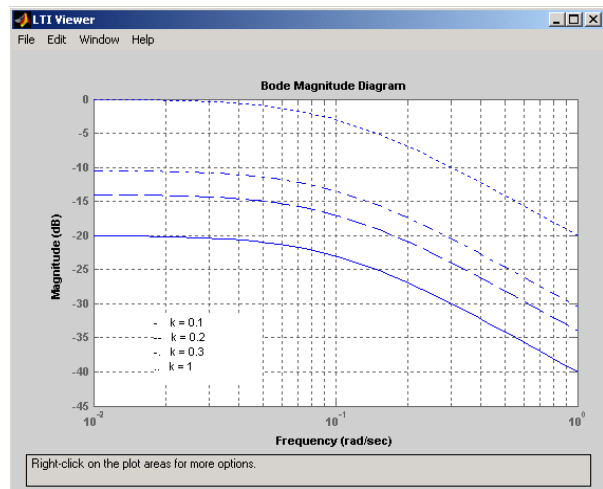
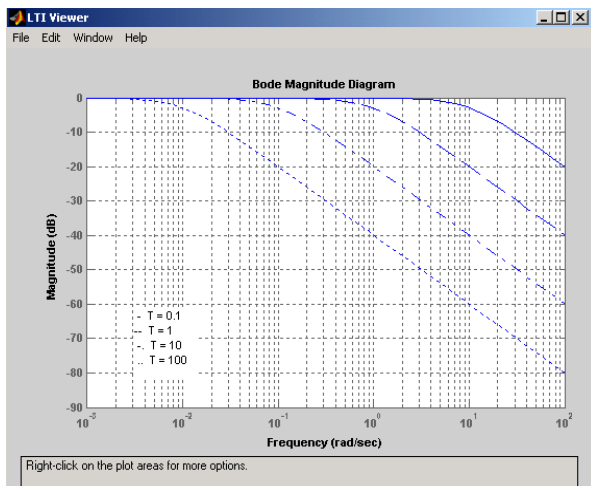
G2=tf([0.2],[10,1]); % k=0.2

G3=tf([0.3],[10,1]); % k=0.3

G4=tf([1],[10,1]); % k=1

% Zobrazeni do jednoho grafu v pripade, ze máme zadano více
% prenosu a potrebujeme je mezi sebou porovnat.

ltiview('bode',G1,G2,G3,G4)

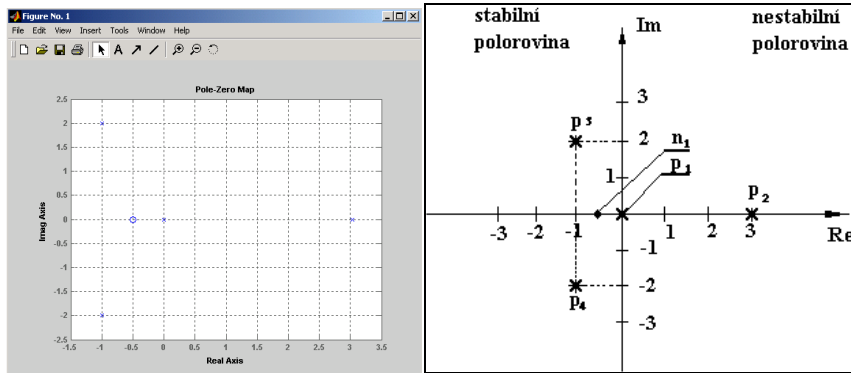


3.1.10 Poloha pólů a nul přenosu

Závěrem je třeba si zdůraznit význam polohy pólů a nul v komplexní rovině přenosu systému - rozpojeného regulačního obvodu. Jejich poloha je zřejmá z výrazu pro přenos, kde polynomy čitatele i jmenovatele jsou rozloženy v součin kořenových činitelů.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - n_1) \dots (s - n_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

Nuly i póly mohou být buď reálné, nebo komplexně sdružené nebo i ryze imaginární. Reálné póly způsobují aperiodický přechodový děj, póly komplexně sdružené způsobují kmitavou složku přechodového děje. Póly v počátku vyjadřují integrační charakter přechodového děje systému.



Nuly v počátku představují derivační charakter. U pólů i nul je rozhodující jejich poloha v komplexní rovině vzhledem k imaginární ose. V levé polovině jsou stabilní póly i nuly (mají zápornou reálnou část), v pravé polovině jsou nestabilní póly i nuly (mají kladnou reálnou část). Čím jsou stabilní póly dále od imaginární osy, tím je přechodový děj více tlumen. Póly v pravé polovině znamenají vždy nestabilní přechodový děj. Jsou-li nuly blíže imaginární ose než póly, bude převládat derivační složka přenosu.

Řešení v MATLABu :

```
% Vyjádření polů a nul v komplexní rovině.
% G(s)=2s+1/(0.33s^2-s)(s^2+2s+5)
num=[2,1];
den=[0.33,-0.34,-0.35,-5,0];
Gs=tf(num,den)
pzmap(Gs) % Vyjádření polů a nul přenosu v komplexní rovině.
```

3.1.11 Typové dynamické členy regulačních obvodů

Zatím jsme obecně hovořili o systému, o jeho struktuře a jako příklad systému jsme uvedli i regulační obvod. Záleží však na zvolené rozlišovací úrovni, co v rámci regulačního obvodu považujeme za systém, subsystém resp. supersystém.

Považujme jednotlivé členy regulačního obvodu za systémy a provedme jejich obecné třídění podle průběhu přechodové charakteristiky $h(t)$.

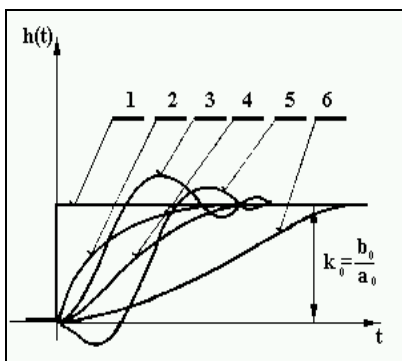
Uvažujme dynamický člen regulačního obvodu s přenosem

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} e^{-sT_d} \quad (3.3)$$

pro který je splněno, že $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, a $T_d > 0$ a rovněž i podmínka fyzikální realizovatelnosti $m \leq n$ (slabá) nebo $m < n$ (silná) a dále se předpokládá, že polynom $a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$ má stabilní kořeny s_j ($\text{Re } s_j < 0$; $j = 1, 2, \dots, n$).

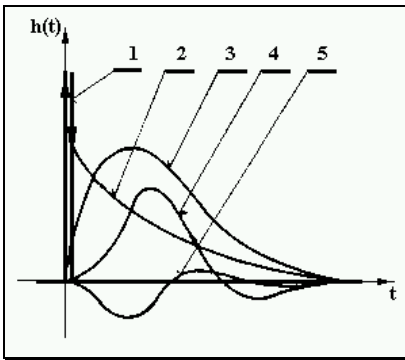
Hodnota přechodové charakteristiky dynamického členu (3.3) pro čas $t \rightarrow \infty$ vede k třem již dříve zmíněným skupinám

- proporcionální (statická)
- integrační (astatická)
- derivační



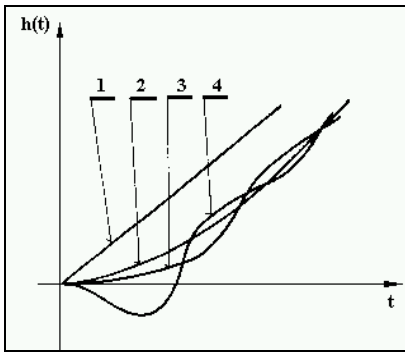
Přechodové charakteristiky proporcionálních členů

- 1 - 0-tého řádu (ideálního proporcionálního členu),
- 2 - 1. řádu (reálného proporcionálního členu),
- 3 - 2. řádu (kmitavého, $0 < \xi < 1$),
- 4 - 2. řádu (mezního aperiodického členu; $\xi = 1$),
- 5 - 2. řádu kmitavého s neminimální fází,
- 6 - n-tého řádu bez dopravního zpoždění



Přechodové charakteristiky derivačních členů

- 1 - 1. řádu (ideálního derivačního členu),
- 2 - 1. řádu se setrvačností 1. řádu (reálného derivačního členu),
- 3 - 1. řádu se setrvačností 2. řádu,
- 4 - r -tého řádu se setrvačností n -tého řádu bez dopravního zpoždění,
- 5 - r -tého řádu s neminimální fází.



Přechodové charakteristiky integračních členů

- 1 - 1. řádu (ideální integrační člen),
- 2 - 1. řádu se setrvačností 1. řádu,
- 3 - 1. řádu se setrvačností 2. řádu,
- 4 - 1. řádu s neminimální fází a se setrvačností druhého resp. vyššího řádu.

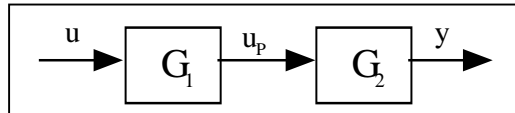
4. Bloková algebra

Dosud jsme se zabývali způsoby popisu dynamických vlastností jednorozměrného systému, tj. systému s jedním výstupem. znázorňujeme jej obdélníkovým blokem, v němž si představujeme soustředěny jeho dynamické vlastnosti.

Při řešení úloh z teorie automatického řízení se však setkáváme s tím, že řešíme dynamické vlastnosti regulačního obvodu, ve kterém je několik takových systémů (minimálně regulovaná soustava a regulátor vyjádřené každý jedním blokem), které jsou spolu určitým způsobem propojeny. Vzniká tak blokové schéma složeného systému. Pro výpočet přenosu složeného systému vzniklého různým spojováním systémů, sčítáním a rozdělováním signálů se používá blokové algebry, jejíž pravidla pro základní elementární způsoby zapojení dvou systémů jsou v následující tabulce.

- a) 1) $U_p(s) = G_1(s) \cdot U(s)$
 2) $Y(s) = G_2(s) \cdot U_p(s)$

$$U(s) = U(s)[G_1(s) \cdot G_2(s)]$$



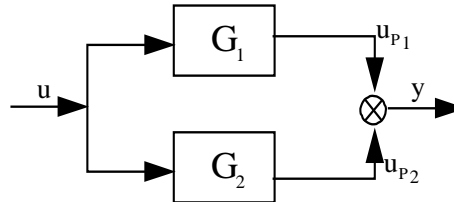
% Bloková algebra - seriove zapojeni.

```
G1=tf([1,1],[1,2,1]); % Zadani obrazoveho prenosu G1(s)
G2=tf([2],[1,3,4]); % Zadani obrazoveho prenosu G2(s)
G_ser=series(G1,G2) % Vysledny prenos serioveho zapojeni G1(s) a G2(s).
Výsledek : Transfer function:
          2 s + 2
```

$$\frac{2s + 2}{s^4 + 5s^3 + 11s^2 + 11s + 4}$$

- b) 1) $U_{p1}(s) = G_1(s) \cdot U(s)$
 1) $U_{p2}(s) = G_2(s) \cdot U(s)$
 2) $Y(s) = U_{p1}(s) + U_{p2}(s)$
 3) $Y(s) = G_1(s) \cdot U(s) + G_2(s) \cdot U(s)$

$$U(s) = U(s)[G_1(s) + G_2(s)]$$



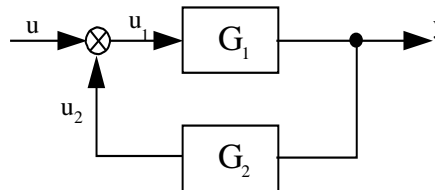
% Bloková algebra - paralelni zapojeni.

```
G1=tf([1,1],[1,2,1]); % Zadani obrazoveho prenosu G1(s)
G2=tf([2],[1,3,4]); % Zadani obrazoveho prenosu G2(s)
G_par=parallel(G1,G2) % Vysledny prenos paralelniho zapojeni G1(s) a G2(s).
Výsledek : Transfer function:
          s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6
```

$$\frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}{s^4 + 5s^3 + 11s^2 + 11s + 4}$$

- c) 1) $U_1(s) = U(s) + U_2(s)$
 2) $Y(s) = G_1(s) \cdot U_1(s)$
 3) $U_2(s) = G_2(s) \cdot Y(s)$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} \cdot U(s)$$



% Bloková algebra - antiparalelni (kladna zpetna vazba) zapojeni.

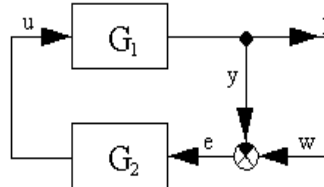
```
G1=tf([1,1],[1,2,1]);      % Zadani obrazoveho prenosu G1(s)
G2=tf([2],[1,3,4]);        % Zadani obrazoveho prenosu G2(s)
G_zv1=feedback(G1,-G2)     % Vysledny prenos antiparalelniho zapojeni G1(s) a G2(s).
```

Výsledek : Transfer function:

$$\frac{s^3 + 4 s^2 + 7 s + 4}{s^4 + 5 s^3 + 11 s^2 + 9 s + 2}$$

- d) 1) $E(s) = W(s) - Y(s)$
 2) $U(s) = G_2(s) \cdot E(s)$
 3) $Y(s) = G_1(s) \cdot U(s)$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot W(s)$$



% Blokova algebra - antiparalelni (zaporna zpetna vazba) zapojeni.

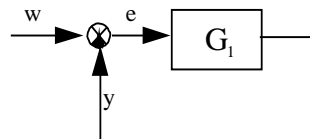
```
G1=tf([1,1],[1,2,1]);      % Zadani obrazoveho prenosu G1(s)
G2=tf([2],[1,3,4]);        % Zadani obrazoveho prenosu G2(s)
G_ser=series(G1,G2);
G_zv2=feedback(G_ser,1)    % Vysledny prenos antiparalelniho zapojeni G1(s) a G2(s)
% Zaporna zpetna vazba.
```

Výsledek : Transfer function:

$$\frac{2 s + 2}{s^4 + 5 s^3 + 11 s^2 + 12 s + 6}$$

- e) 1) $E(s) = W(s) - Y(s)$
 2) $Y(s) = G_1(s) \cdot E(s)$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} \cdot W(s)$$



% Blokova algebra - antiparalelni (zpetnovazebni) zapojeni.

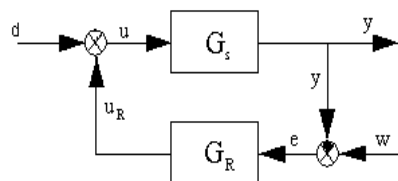
```
G1=tf([1,1],[1,2,1]);      % Zadani obrazoveho prenosu G1(s)
G2=1;                      % Zadani obrazoveho prenosu G2(s)
G_zv3=feedback(G1,1)       % Vysledny prenos antiparalelniho zapojeni G1(s) a G2(s)
% Zaporna zpetna vazba.
```

Výsledek : Transfer function:

$$\frac{s + 1}{s^2 + 3 s + 2}$$

- f) 1) $Y(s) = G_S(s) \cdot U(s)$
 2) $U_R(s) = G_R(s) \cdot E(s)$
 3) $U(s) = D(s) + U_R(s)$
 4) $E(s) = -Y(s) + W(s)$

$$Y(s)[1 + G_R(s) \cdot G_S(s)] = G_S(s) \cdot D(s) + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot W_S(s)$$



% Blokova algebra slozeny system "Regulovana soustava-regulator" % s prenosem rizeni a poruchy.
 % Prenos rizeni Y(s)/W(s); prenos poruchy Y(s)/D(s).

```

Gs=tf([1,1],[1,2,1])      % Zadani obrazoveho prenosu Gs(s)
Gr=tf([10,1],[1,0])      % Zadani obrazoveho prenosu Gr(s)
G_ser=series(Gs,Gr);
G_w=feedback(G_ser,1)     % Prenos Y(s)/W(s).
G_d=feedback(Gs,Gr)      % Prenos Y(s)/D(s).
% Y(s)=[Gs(s)/1+Gr(s)*Gs(s)]*D(s)+[Gr(s)*Gs(s)/1+Gr(s)*Gs(s)]*W(s)

```

Výsledek : Transfer function: Přenos soustavy $G_S(s)$

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

Transfer function: Přenos regulátoru $G_R(s)$

$$\frac{10s + 1}{s}$$

Transfer function: Přenos řízení $G_W(s)$

$$\frac{10s^2 + 11s + 1}{s^3 + 12s^2 + 12s + 1}$$

Transfer function: Přenos poruchy $G_D(s)$

$$\frac{s^2 + s}{s^3 + 12s^2 + 12s + 1}$$

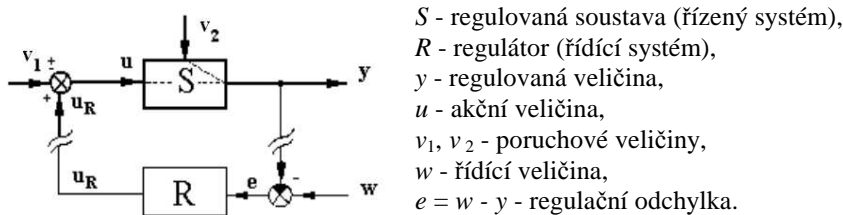
5. Regulovaná soustava

Pod tímto pojmem rozumíme soubor zařízení, v němž probíhá regulační pochod a v němž se ovlivňuje regulovaná veličina (motor, tlaková nádrž, reaktor, pec, dopravní prostředek). Regulovaná soustava je dána všeobecně tokem energie (tepelné, elektrické, tlakového vzduchu, atd.) a tokem hmoty (kapaliny, sypaného materiálu, atd.).

Při řešení rovnice soustavy předpokládáme, že regulovaná veličina má stejnou hodnotu ve všech místech (tzv. soustředěné kapacity). Toto je někdy zcela splněno např. pro tlakové nádoby, někdy jen zčásti (v malém rozmezí změn), např. teplota v pecích nebo ve výměníku.

5.1 Regulované soustavy

Vlastní technologický proces, který je regulátorem řízen, probíhá v regulované soustavě - řízeném systému, která je částí uzavřeného regulačního obvodu, jak vyplývá z následujícího obrázku.



Obr. 5.1 Regulovaná soustava v zapojení do jednoduchého regulačního obvodu

Podle obr.5.1 můžeme snadno definovat dynamické vlastnosti regulované soustavy, tj. přenos soustavy $G_S(s)$ a přenos poruchy soustavy $G_{Sd_i}(s)$, vyjádřené v oblasti komplexní proměnné (v prostoru obrazů)

$$Y(s) = G_S(s)U_R(s) + G_{Sd_i}(s)D_i(s)$$

Přenos regulované soustavy je tedy

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ za předpokladu, že } d_i(t) = 0$$

a přenos poruchy regulované soustavy

$$G_{Sd_i}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} \text{ za předpokladu, že } u(t) = 0 \text{ a } i = 1, 2, \dots$$

Častým způsobem vyjadřování dynamických vlastností regulované soustavy je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty spolu se zadanými počátečními podmínkami, která pro n -tý řád soustavy má tvar

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

a z které pro nulové počáteční podmínky (celkem n počátečních podmínek)

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

a známý tvar vstupního signálu $u(t)$ můžeme použitím Laplaceovy transformace stanovit přenos regulované soustavy

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

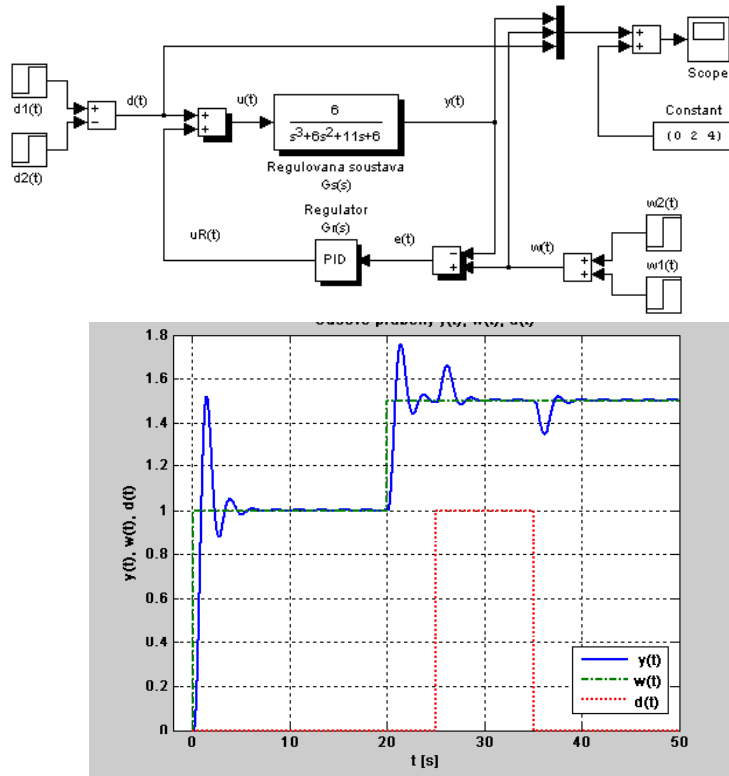
U regulovaných soustav je důležitým koeficientem tzv. součinitel autoregulace s_0 , který určuje, zda jde o regulovanou soustavu statickou nebo astatickou a to:

při $a_0 \neq 0$ - jedná se o statickou - proporcionální soustavu,

$a_0 = 0$ - jedná se o astatickou - integrační soustavu.

Poznámka: Pro statické regulované soustavy se prosazuje název proporcionální regulovaná soustava bez setrvačnosti resp. se setrvačností n -tého řádu, pro integrační regulované soustavy zase integrační regulovaná soustava bez setrvačnosti resp. se setrvačností n -tého řádu.

Blokový diagram modelu jednoduchého regulačního obvodu v programu Matlab/ Simulink.



5.1.1 Proporcionální regulované soustavy

Mají tu vlastnost, že po vychýlení z rovnovážného stavu jsou schopny teoreticky vždy dosáhnout nového rovnovážného stavu bez působení (připojení) regulátoru. Dynamické vlastnosti proporcionální regulované soustavy n-tého řádu vyjadřuje rovnice

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots} = \frac{\frac{1}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0}s + \frac{a_2}{a_0}s^2 + \dots} = \frac{k_S}{1 + T_1s + T_2^2s^2 + \dots} = \frac{k_S}{(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots}$$

kde $\frac{1}{s_0}$ [-] je tzv. proporcionální zesílení regulované soustavy,

T_1, T_2 [s] časové konstanty regulované soustavy,

T_a, T_b [s] časové konstanty, které např. pro statickou regulovanou soustavu 2. řádu mají relaci s časovými konstantami T_1 a T_2 podle vztahů

$$T_1 = T_a + T_b; T_2^2 = T_a T_b.$$

Pro průběh frekvenční charakteristiky vypočítáme z frekvenčního přenosu $G_S(j\omega)$ počáteční a koncový bod charakteristiky, tj. limity pro $\omega = 0$ a $\omega = \infty$:

$$G_S(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k_S}{1 + T_1 j\omega + T_2^2 (j\omega)^2 + \dots} = k_S,$$

$$G_S(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k_S}{1 + T_1 j\omega + T_2^2 (j\omega)^2 + \dots} = 0.$$

Pro průběh přechodové charakteristiky vypočítáme limity přenosu $G_S(s)$ použitím vět Laplaceovy transformace o počáteční a koncové hodnotě:

počáteční hodnota funkce (pro $t = 0$) $\lim_{t=0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s),$

koncová hodnota funkce (pro $t = \infty$) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$.

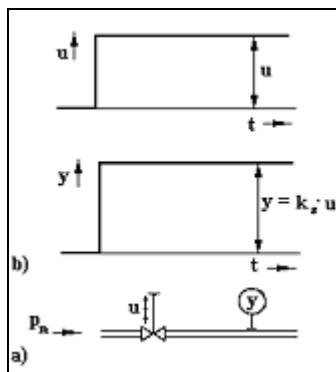
Pro přechodovou charakteristiku známe tvar vstupní funkce $u(t)$ a tedy $L\{u(t)\} = 1/s$. Potom počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky bude

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{k_s}{1 + T_1s + T_2^2s^2 + \dots} \frac{1}{s} = 0,$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_s}{1 + T_1s + T_2^2s^2 + \dots} \frac{1}{s} = k_s.$$

a) Regulované soustavy bezkapacitní

Příkladem takové soustavy může být krátký úsek potrubí, jímž protéká kapalina nebo jiná nestlačitelná látka. U této soustavy se tlak (nebo i průtok) mění se změnou polohy regulačního ventilu téměř bez zpoždění. Tyto regulované soustavy se vyskytují jen zřídka.



Obr. 5.2 Proporcionální bezkapacitní soustava, a) příklad soustavy, b) přechodová charakteristika

b) Regulované soustavy jednodukapacitní

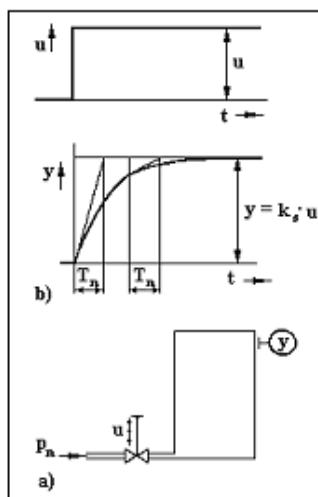
Vyznačují tím, že mají jednu kapacitu, která umožňuje hromadit energii nebo látku. Regulovaná veličina se u těchto soustav při skokové změně akční veličiny mění ihned s určitou počáteční rychlostí, úměrnou rozdílu mezi okamžitou a konečnou hodnotou regulované veličiny. Tato rychlost se tedy stále zmenšuje, až po delším čase se regulovaná veličina ustálí na nové (konečné) hodnotě, kterou můžeme určit ze vztahu

$$y = k_s u$$

Další charakteristickou veličinou této soustavy mimo k_s je doba náběhu T_n .

Doba náběhu je doba, za kterou by výstupní veličina dosáhla nové rovnovážné polohy, pokud by rostla stejně rychle jako v počátku. U přechodové charakteristiky soustavy jednodukapacitní její subtangenta v libovolném bodě křivky je konstantní a rovná se době náběhu.

Jako příklad soustavy jednodukapacitní můžeme uvést nádrž, která se plní vzduchem přes regulační ventil.



Obr.5.3 Jednokapacitní proporcionální soustava, a) příklad soustavy, b) přechodová charakteristika

Chování proporcionální soustavy jednokapacitní lze matematicky vyjádřit pomocí lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$a_1 y' + a_0 y = u$$

kde $\frac{a_1}{a_0} = T_n$ a $\frac{1}{a_0} = k_s$.

s_0 je součinitel autoregulace, který je charakteristický pro soustavy proporcionální. U soustav astatických je $a_0 = 0$.

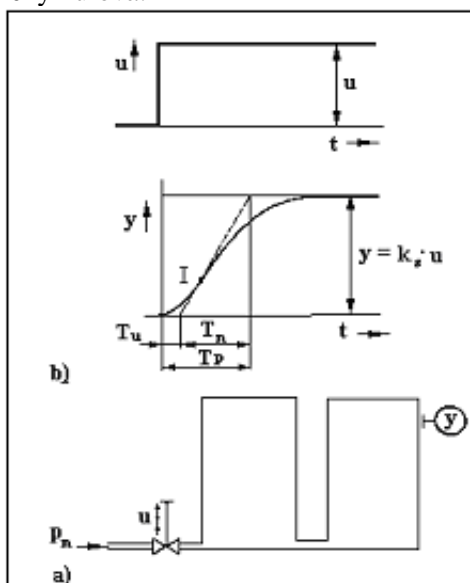
Podle tvaru rovnice se jednokapacitní soustava nazývá také soustavou statickou 1. řádu.

c) Regulované soustavy dvoukapacitní

Tyto soustavy (obr. 5.4) jsou charakteristické tím, že mají dvě kapacity za sebou. Přechodová charakteristika této soustavy má mimo charakteristické veličiny k_s ještě dvě časové konstanty, a to dobu náběhu T_n a dobu průtahu T_u . Doba průtahu T_u je časový úsek mezi počátkem změny a bodem, v němž protíná přímkou počátečního rovnovážného stavu tečna charakteristiky vedená jejím inflexním bodem I. Součet doby průtahu a náběhu se nazývá doba přechodu - T_p .

$$T_p = T_u + T_n$$

Rychlost změny regulované veličiny je největší v inflexním bodě. Na začátku odezvy a při dosažení rovnovážného stavu je rychlost změny nulová.



Obr. 5.4 Dvoukapacitní proporcionální soustava, a) příklad soustavy, b) přechodová charakteristika

Jako příklad soustavy dvoukapacitní lze uvést sériové zapojení dvou nádrží s regulačním ventilem, plněných vzduchem. V praxi se se soustavami tohoto typu setkáváme velice často, především u tepelných soustav.

Vlastnost soustavy dvoukapacitní popisuje lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = u$$

d) Regulované soustavy několikakapacitní

Tyto soustavy vznikají sériovým zapojením např. členů jednodukapacitních. Přejchodové charakteristiky těchto soustav mají obdobný tvar jako přechodová charakteristika soustavy dvoukapacitní. Mají i stejné charakteristické veličiny - k_s , T_u , T_n . Tyto soustavy, obdobně jako soustavy dvoukapacitní, mohou obsahovat i členy druhého řádu (setrvačné hmotnosti, indukčnosti).

Závěrem se seznámíme se způsobem, jak posuzovat regulovatelnost proporcionálních soustav. Tu můžeme přibližně posoudit z poměru doby průtahu k době náběhu (tab. 5.1).

Tabulka 5.1: Regulovatelnost soustavy

	$0 \leq T_u / T_n \leq 0,1$	dobře regulovatelné
2	$0,1 \leq T_u / T_n \leq 0,4$	regulovatelné
3	$0,4 \leq T_u / T_n \leq 1$	obtížně regulovatelné
4	$T_u / T_n \geq 1$	nelze regulovat

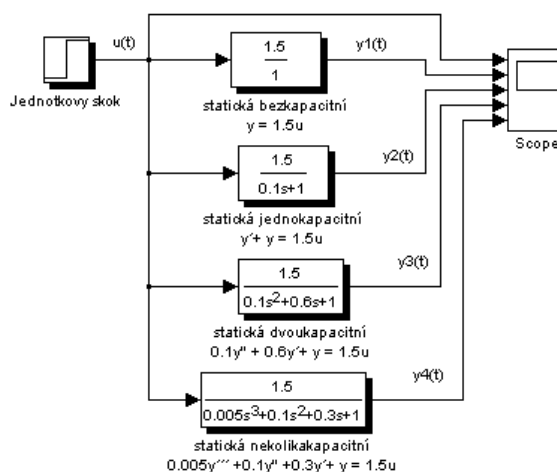
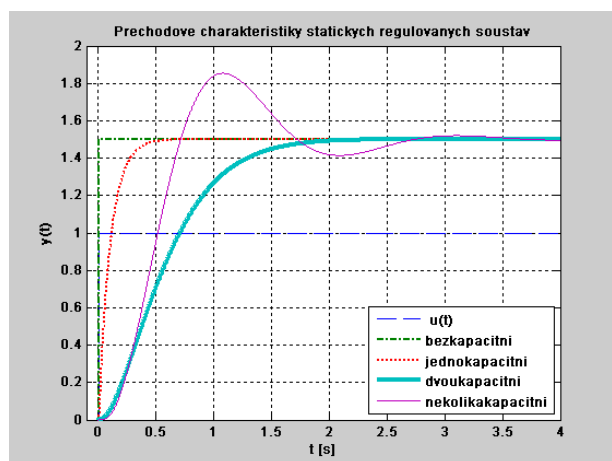
V následující tab. 5.2 jsou seřazeny proporcionální regulované soustavy podle stupně řádu resp. podle počtu kapacit. Jsou uvedeny jejich diferenciální rovnice, přenosy, přechodové charakteristiky, frekvenční charakteristiky a amplitudové logaritmické charakteristiky včetně příkladů regulovaných soustav.

Tabulka 5.2: Proporcionální regulované soustavy

0.řádu	$a_0 y = u$	$G_S(s) = k_s$
1.řádu	$a_1 y' + a_0 y = u$	$G_S(s) = \frac{k_s}{1 + T_1 s}$
2.řádu	$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = u$	$G_S(s) = \frac{k_s}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2}$
3.řádu	$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = u$	$G_S(s) = \frac{k_s}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3}$

Přechodová charakteristika	Frekvenční charakteristika	Amplitudová logaritmická char.	Příklad RS

Blokový diagram modelu proporcionálních regulovaných soustav (viz obr.5.2-5.4)



5.1.2 Astatické regulované soustavy

Integrační soustavy nemají, na rozdíl od soustav proporcionálních, samoregulační schopnost. Vyplyvá to ze skutečnosti, že $s_0 = 0$. Po vyvedení soustavy prvního řádu z rovnovážného stavu, výstupní signál po odeznění přechodového děje se mění konstantní rychlostí. Dynamické vlastnosti integrační soustavy vyjadřuje diferenciální rovnice

$$\dots a_3 y'''(t) + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) = u(t)$$

a přenos ve tvarech

$$G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots} = \frac{\frac{1}{a_1}}{s \left(1 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1}s^2 + \dots \right)} =$$

$$= \frac{K_I}{s(1 + T_1s + T_2^2s^2 + \dots)}$$

kde $K_I = \frac{1}{a_1} \text{ [s}^{-1}\text{]}$ je tzv. proporcionální činitel rychlosti,
 $T_1, T_2, \dots \text{ [s]}$ časové konstanty regulované soustavy.

Počáteční a koncový bod frekvenční charakteristiky vypočítáme jako limity frekvenčního přenosu pro $\omega = 0$ a $\omega = \infty$:

$$G_s(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K_I}{j\omega[1 + T_1j\omega + T_2^2(j\omega)^2 + \dots]} = -j\infty,$$

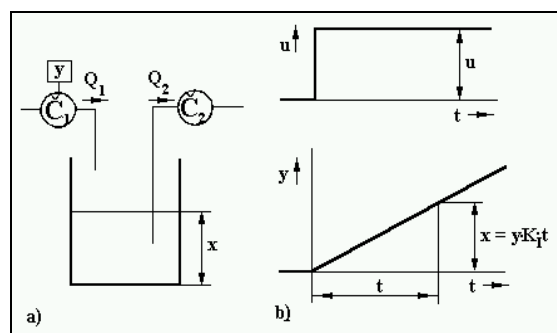
$$G_s(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K_I}{j\omega[1 + T_1j\omega + T_2^2(j\omega)^2 + \dots]} = 0.$$

Počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky je vypočítána podle vztahů

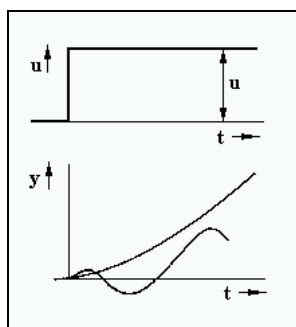
$$y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} sG_s(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K_I}{s(1 + T_1s + T_2^2s^2 + \dots)} \frac{1}{s} = 0,$$

$$y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sG_s(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_I}{s(1 + T_1s + T_2^2s^2 + \dots)} \frac{1}{s} = \infty.$$

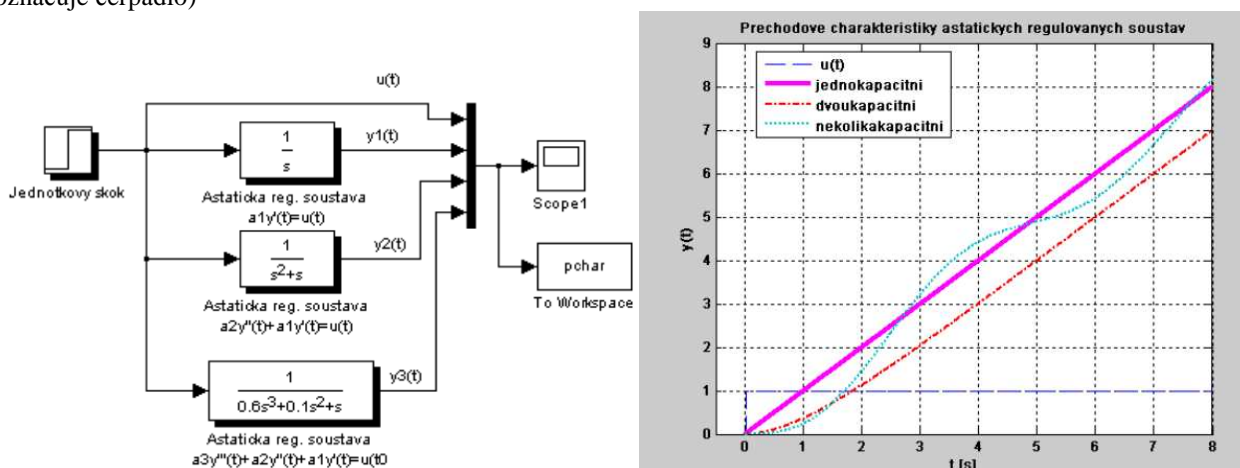
Integrační regulovaná soustava je soustava, u níž po změně akční veličiny přibývá nebo ubývá regulované veličiny trvale. Změna probíhá trvale, pokud neuvažujeme omezení regulované veličiny dané konstrukcí některého jejího členu. Je tedy zřejmé, že po poruše rovnováhy u těchto soustav nenastane samovolné ustálení na nové hodnotě, jak tomu bylo u soustav proporcionálních, ale odchylka od původního rovnovážného stavu se neustále zvětšuje. Tyto soustavy nemají autoregulaci. Z toho vyplývá, že následky vzniklé poruchou lze odstranit pouze pomocí regulátoru. Obdobně, jako soustavy proporcionální, tak i soustavy integrační můžeme rozdělit podle počtu kapacit s tou výjimkou, že neexistuje integrační bezkapacitní soustava.



Obr. 5.5 Přechodová charakteristika proporcionálních soustav – prvního řádu



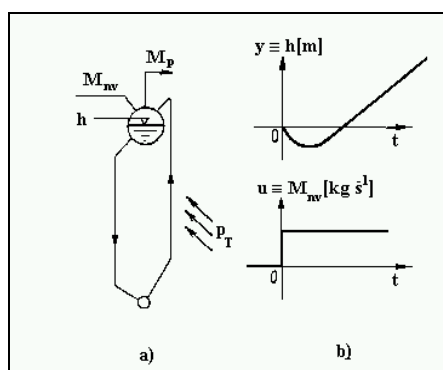
Obr. 5.6 Jednokapacitní integrační soustava, a) příklad soustavy ($Q_2 = \text{konst.}$), b) přechodová charakteristika (\check{C}_1, \check{C}_2 označuje čerpadlo)



5.1.3 Regulované soustavy s neminimální fází

Přenos některých regulovaných soustav obsahuje kladné nulové body. Tato vlastnost se projeví v průběhu přechodové charakteristiky, která v počátku přechodového děje má výchylku na opačnou stranu než je požadováno (obr. 5.7, 5.8). Jako příklad si uvedeme chování výšky hladiny v bubnu kotle (obr. 5.7). Odpovídající tvar přenosu je:

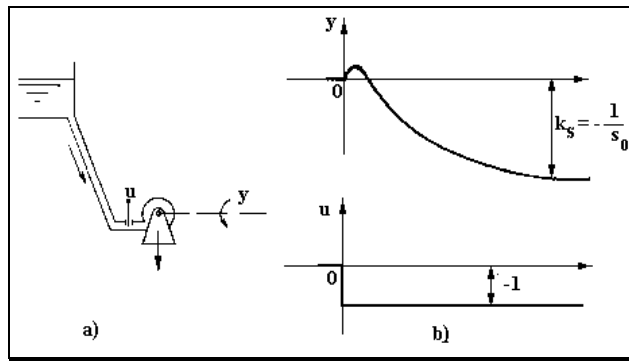
$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1 - T_{ln}s}{s(1 + T_{1p}s)}$$



Obr. 5.7 Chování výšky hladiny v bubnu kotle. a - technologické schéma, b - přechodová charakteristika

Chování soustavy lze fyzikálně vysvětlit následně: Při vývinu páry v kotli je do bubnu dopravována parovodní směs, která má určitý měrný objem. Po větší změně akční veličiny, tj. při zvýšení napájení větším hmotnostním tokem "studené" vody je porušena tepelná bilance parovodní směsi ve varném systému i v bubnu kotle. Dojde k ochlazení parovodní směsi, která zmenší svůj měrný objem a v důsledku toho dojde i ke snížení hladiny až do té doby, než vlivem nerovnováhy hmotnostních toků přiváděné napájecí vody M_{nw} a odváděné syté páry M_p začne hladina stoupat. Při změně odběru syté páry dojde k opačnému ději (tzv. navržení hladiny).

Jiným příkladem je chování vodní turbíny s delším přívodním potrubím (obr. 5.8).



Obr. 5.8 Chování vodní turbíny s delším přívodním potrubím. a - technologické schéma, b - přechodová charakteristika

Při přivírání regulačního orgánu dojde vlivem setrvačnosti vody v přiváděcím potrubí ke zvýšení tlaku před regulačním orgánem a v důsledku toho dojde ke zvýšení průtokové rychlosti vody. V počátku přechodového jevu se tak zvýší úhlová rychlost turbíny.

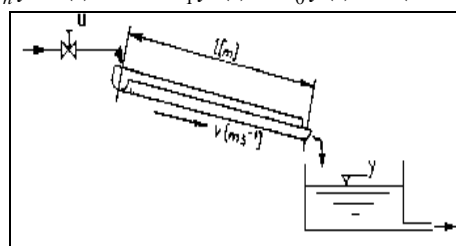
Odpovídající tvar přenosu je
$$G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1 - T_{1n}s}{(1 + T_{1p}s)(1 + T_{2p}s)}$$

Regulovaná soustava s neminimální fází (neminimální dynamický systém) je taková, která má v přenosu alespoň jeden nulový bod v pravé polorovině roviny kořenů s (tj. alespoň jeden kladný nulový bod). Naproti tomu nestabilní regulovanou soustavou (nestabilním dynamickým systémem) je regulovaná soustava, která má alespoň jeden pól v pravé polorovině roviny kořenů s .

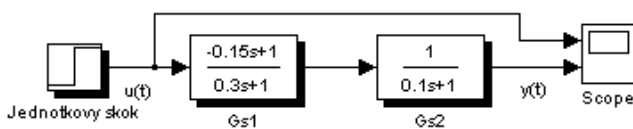
5.1.4 Regulované soustavy s dopravním zpožděním

Kromě vlastností, které již byly uvedeny mohou mít regulované soustavy také ještě dopravní zpoždění T_d . Projeví se zpožděním výstupního signálu vzhledem k časovému působení vstupního signálu a to právě o hodnotu T_d . Příklad regulované soustavy je zobrazen na obr. 5.9, odpovídající přechodové charakteristika na obr. 5.10. Je zřejmé, že dopravní zpoždění pouze časově posune přechodovou charakteristiku (výstupní signál) o hodnotu T_d , tvar zůstává stejný, jako v případě bez dopravního zpoždění. Nemůže proto při působení dopravního zpoždění platit rovnice (5.1). Upravíme ji tím, že za předpokladu nezměněného výstupního signálu uvažujeme posunutý vstupní signál $u(t - T_d)$, jak je čárkovaně zakresleno na obr. 5.10. Dostaneme potom diferenciální rovnici regulované soustavy n -tého řádu s dopravním zpožděním

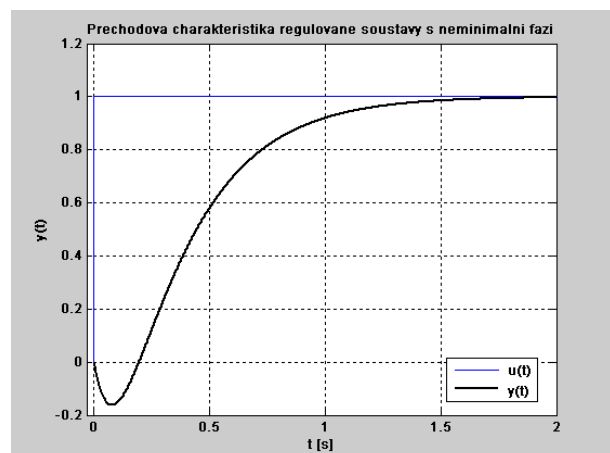
$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t - T_d)$$



Obr. 5.9 Příklad regulované soustavy s dopravním zpožděním



Obr. 5.10 Přechodová charakteristika k regulované soustavě



Po Laplaceově transformaci pro nulové počáteční podmínky získáme rovnici

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) L\{y(t)\} = L\{u(t - T_d)\} \quad (5.2)$$

Použijeme-li větu o posunutí v originále

$$L\{f(t - a)\} = e^{-as} F(s)$$

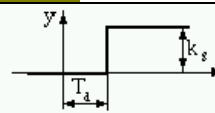
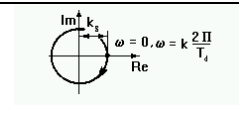
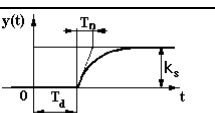
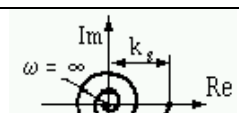
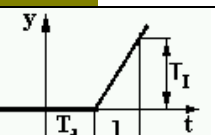
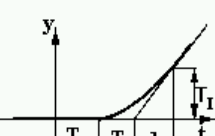
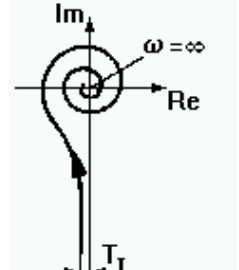
rovnice 5.2 se změnila na

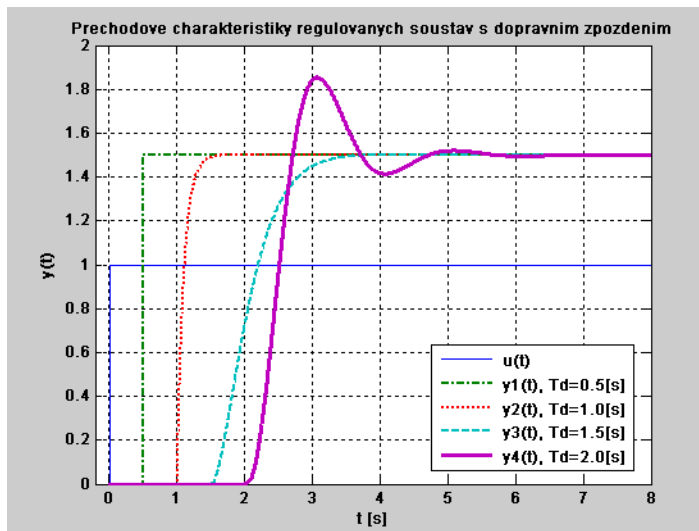
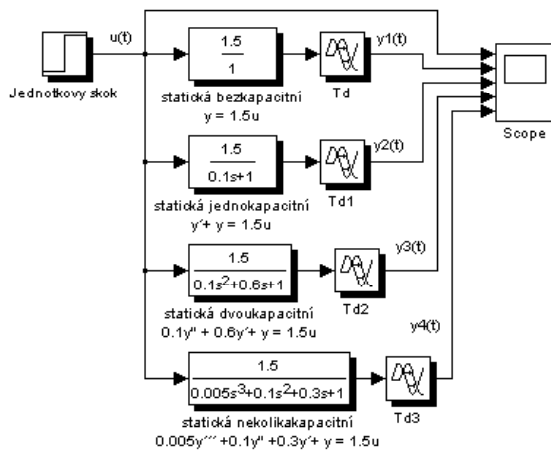
$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = e^{-T_d s} U(s)$$

ze které stanovíme přenos regulované soustavy s dopravním zpožděním

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} e^{-T_d s}$$

Regulované soustavy s dopravním zpožděním

RS	Difer. rovn.	Přenos	Přechod. char.	Frekvenč. char.
STATICKÉ				
0-	$a_0 y = u(t - T_d)$	$G_S(s) = k_S e^{-T_d s}$		
1-	$a_1 y' + a_0 y = u(t - T_d)$	$G_S(s) = \frac{k_S}{1 + T_n s} e^{-T_d s}$		
INTEGRAČNÍ				
1-	$a_1 y' = u(t - T_d)$	$G_S(s) = \frac{T_I}{s} e^{-T_d s}$		
2-	$a_2 y'' + a_1 y' = u(t - T_d)$	$G_S(s) = \frac{T_I}{s(1 + T_S s)} e^{-T_d s}$		



6. Regulátory

Regulátorem je nazýváno zařízení v regulačním obvodu, kterým se uskutečňuje proces automatické regulace. Do regulátoru (řídícího systému) zahrnujeme obvykle - kromě regulované soustavy - všechny členy regulačního obvodu. Podstata činnosti regulátoru spočívá ve vyhodnocení regulační odchylky

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

jako vstupního signálu, ve zpracování této odchylky podle zákona řízení, který je vlastní použitému regulátoru, a ve vytvoření výstupního signálu - akční veličiny $u_R(t)$ - a docílit tak, aby odchylka $e(t)$ byla eliminována nebo aby byla co nejmenší.

Základní třídění regulátorů je podle přívodu energie na regulátory přímé a nepřímé.

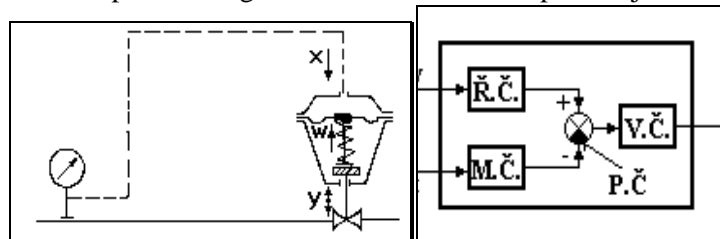
Přímé regulátory nepotřebují ke své činnosti vnější přívod energie, energie snímače stačí k ovládní akčního členu. Patří mezi ně první v praxi používané regulátory: automatický regulátor hladiny I. V. Polzunova z roku 1765 (obr. 6.3) a regulátor otáček (úhlové rychlosti) parního stroje J. Watta z roku 1784¹⁵ (obr. 6.4). O jejich dobré konstrukci svědčí skutečnost, že se používají v modifikovaném provedení dosud.

Nepřímé regulátory se používají v těch případech, kdy signál od snímače není dostatečně silný k přestavení regulačního orgánu. Regulátor potřebuje pro svoji činnost pomocnou energii.

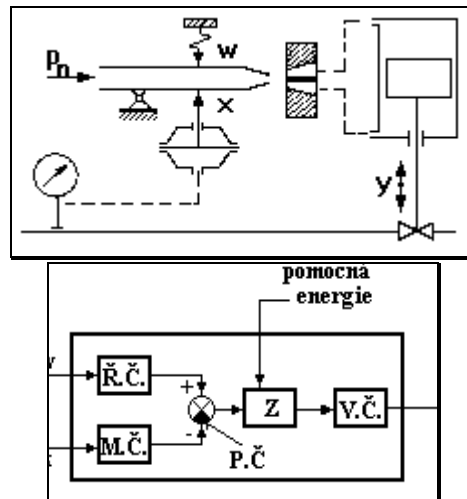
Podle druhu použité pomocné energie můžeme rozdělit nepřímé regulátory:

- na pneumatické,
- na hydraulické,
- na elektrické.

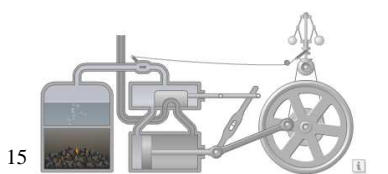
Příklady přímého a nepřímého regulátoru tlaku vzduchu v potrubí jsou na obr. 6.1 a 6.2.



Obr. 6.1 Přímý regulátor; a) příklad, b) blokové schéma



Obr. 6.2 Nepřímý regulátor; a) příklad, b) blokové schéma. Z - zesilovač

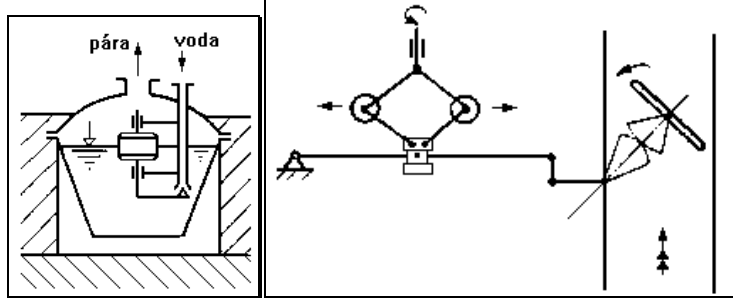


15

Odstředivý regulátor zajišťuje stabilizaci otáček.

Dále lze regulátory rozdělit podle použití:

- na regulátory teploty,
- na regulátory tlaku,
- na regulátory množství,
- na regulátory otáček atd.

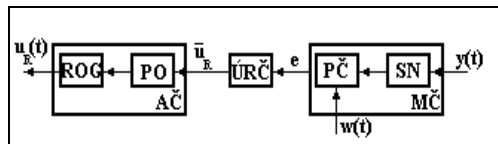


Obr. 6.3 Polzunův regulátor hladiny (r. 1765)

Obr. 6.4 Wattův regulátor otáček parního stroje (r. 1784)

Předností pneumatických systémů řízení je jejich možnost použití ve výbušném prostředí.

Podle průběhu výstupní veličiny můžeme regulátory dělit na spojité a nespojité. U spojitéch regulátorů jsou všechny veličiny po částech spojité v čase. V nespojitém regulátoru je některý člen pracující nespojitě.



Obr. 6.5 Blokové schéma nepřímého regulátoru

SN - snímač, PČ - porovnávací člen, MČ - měřicí člen, ÚŘČ - ústřední člen regulátoru, Po - pohon, ROG - regulační orgán, AČ - akční člen

Nepřímý regulátor můžeme zobrazit blokovým schéma podle obr. 6.5. Regulátory obsahují:

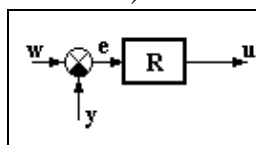
- měřicí člen - snímač (čidlo)
- porovnávací člen
- řídicí člen
- ústřední člen - převodník
- zesilovač
- zpětnou vazbu
- akční člen - pohon (většinou pohybový servomechanismus)
- regulační orgán

Měřicím členem zjišťujeme regulační odchylku $e(t)$, tj. snímačem měříme skutečnou hodnotu regulované veličiny a v porovnávacím členu se počítá její rozdíl od žádané hodnoty. Ústřední člen regulátoru zpracovává regulační odchylku podle matematického zákona, který je mu určen (např. P, PI, PD, PID apod.). V dalším se budeme zabývat výhradně dynamickými vlastnostmi ústředního členu regulátoru (regulátoru v užším slova smyslu).

Akční člen se skládá z pohonu a regulačního orgánu. Regulační orgán řídí průtok energie řízeným systémem. Pohon dodává energii regulačnímu orgánu. Protože mnoho regulačních orgánů má polohový vstup, konstruuje se pohon často jako polohový servomechanismus. Pokud pohon nemá zpětnou vazbu má integrační charakter - pohybuje se konstantní rychlostí.

6.1 Dynamické vlastnosti spojitých regulátorů

Jak již bylo řečeno, při rozboru dynamických vlastností regulátoru se prakticky omezíme na dynamické vlastnosti ústředního členu (porovnejme obr. 6.5 a 6.6).



Obr. 6.6 Zjednodušené blokové schéma regulátoru

Použijeme-li značení na obr. 6.6 můžeme dynamické chování - činnost regulátoru kombinovaného - popsat lineární integrodiferenciální rovnicí

$$\dots + T_2^2 u''(t) + T_1 u'(t) + u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + r_1 \frac{de(t)}{dt}, \quad (6.1)$$

kde $r_0 e(t)$ je proporcionální složka regulátoru,

$r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau$ - integrační složka regulátoru,

$r_1 \frac{de(t)}{dt}$ - derivační složka regulátoru,

..., $T_2^2 u''(t)$, $T_1 u'(t)$ - zpožďující členy regulátoru.

Jde o popis chování tzv. proporcionálně-integračně-derivačního regulátoru se zpožďujícími členy neboli skutečného PID-regulátoru.

Provedeme-li Laplaceovu transformaci rovnice (6.1), za předpokladu splnění nulových počátečních podmínek, můžeme ji upravit na přenos skutečného PID-regulátoru

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + \dots} = \frac{r_0 (1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + \dots}, \quad (6.2)$$

kde r_0 je proporcionální konstanta regulátoru,

r_{-1} - integrační konstanta regulátoru,

r_1 - derivační konstanta regulátoru,

$T_I = \frac{r_0}{r_{-1}}$ - integrační časová konstanta regulátoru,

$T_D = \frac{r_1}{r_0}$ - derivační časová konstanta regulátoru.

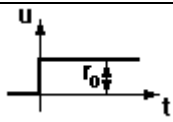
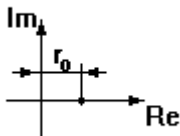
Jestliže časové konstanty zpožďujících členů položíme rovné nule ($T_1 = 0$, $T_2 = 0$, ...) dostaneme pohybovou rovnici i přenos ideálního PID regulátoru

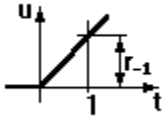
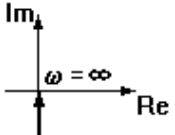

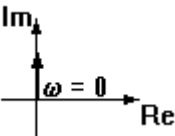
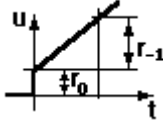
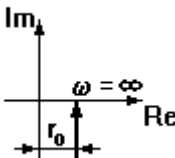
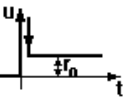
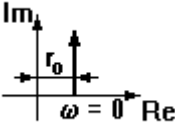
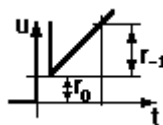
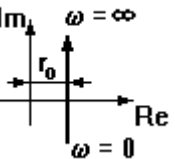
$$u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + r_1 \frac{de(t)}{dt}$$

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 (1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s).$$

Podle toho, které z konstant r_0 , r_{-1} , r_1 položíme rovné nule dostáváme základní druhy regulátoru: P-reg, I-reg, D-reg se samostatně neužívá, ale derivační složka se používá u kombinovaných regulátorů (D-reg. by nic nevěděl o skutečné hodnotě regulační odchylky, neboť na vstupu je signál úměrný první derivaci - rychlosti změny regulační odchylky). V kombinaci se užívají regulátory: PD-reg, PI-reg a PID-reg. Tyto regulátory můžeme uvažovat jako ideální (bez zpožďujících členů) nebo jako skutečné (se zpožďujícími členy).

Tab. 1: Dynamické vlastnosti ideálních regulátorů

Typ	Rovnice	Přechodová charakteristika	Přenos $G_R(p)$	Frekvenční charakteristika
P	$u = r_0 e$		$G_R(s) = r_0$	

I	$u = r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau$		$G_R(s) = \frac{r_{-1}}{s}$	
D-	$u = r_1 \frac{de}{dt}$		$G_R(s) = r_1 s$	
PI	$u = r_0 e + r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau$		$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$	
PD	$u = r_0 e + r_1 \cdot \frac{de}{dt}$		$G_R(s) = r_0 + r_1 s$	
PID	$u = r_0 e + r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + r_1 \frac{de}{dt}$		$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$	

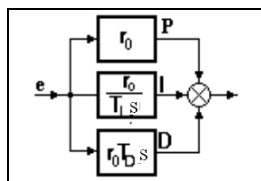
Ukážeme si, jaký vliv mají zpozdňující členy, jejich vliv na dynamické vlastnosti regulátorů. Skutečný P-regulátor bude mít přenos

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_0}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + \dots}$$

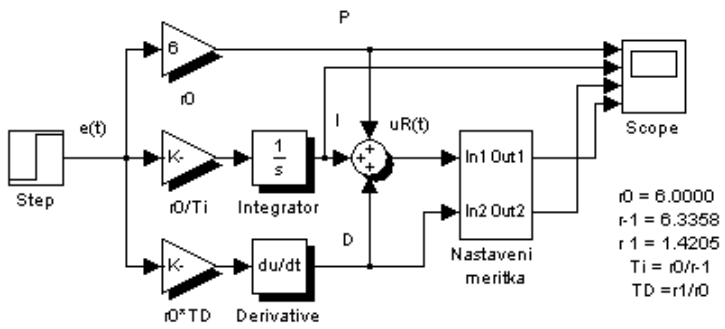
Charakter přenosu je stejný jako měly proporcionální regulované soustavy. Skutečný I-regulátor má přenos

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_{-1}}{s(1 + T_1 s + T_2^2 s^2 + \dots)}$$

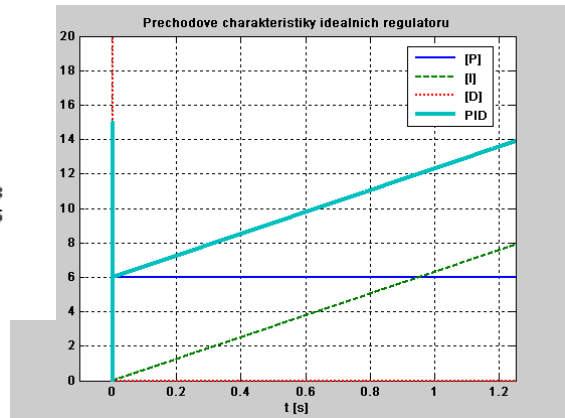
Charakter přenosu je stejný jako mají integrační regulované soustavy. V tabulce 2 jsou přehledně sestaveny dynamické vlastnosti čistě derivačních členů. Kombinovaný PID-regulátor je tvořen třemi paralelními složkami regulátoru - proporcionální, integrační a derivační (obr. 6.5). Dynamické vlastnosti tohoto PID-regulátoru v ideální verzi i ve verzích se zpožděním jsou uvedeny v tab. 3. Dynamické vlastnosti regulátorů PI a PD se již z uvedeného dají odvodit.



Obr. 6.5 Blokové schéma ideálního PID-regulátoru



$r_0 = 6.0000$
 $r_i = 6.3358$
 $r_d = 1.4205$
 $T_i = r_0/r_i$
 $T_D = r_d/r_0$



Tab. 2: Dynamické vlastnosti derivačních členů

Typ	Rovnice	Přenos	Přechodová charakteristika
ideální	$u = r_1 e^{-t}$	$G_R(s) = r_1 s$	
se zpožděním 1. řádu	$T_1 u' + u = r_1 e^{-t}$	$G_R(s) = \frac{r_1 s}{1 + T_1 s}$	
se zpožděním 2. řádu	$T_2^2 u'' + T_1 u' + u = r_1 e^{-t}$	$G_R(s) = \frac{r_1 s}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2}$	
Typ	Přechodová charakteristika	Frekvenční charakteristika	Amplitudová logaritmická charakteristika
ideální			
se zpožděním 1. řádu			
se zpožděním 2. řádu			

Tab. 3: Dynamické vlastnosti kombinovaného PID – regulátoru

Typ	Rovnice	Přenos
ideální	$u = r_0 e + r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + r_1 \frac{de}{dt}$	$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s =$ $= r_0 \left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right]$

se zpožděním 1. řádu	$T_I u' + u = r_0 e + r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + r_1 \frac{de}{dt}$	$G_R(s) = \frac{r_0 \left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right]}{1 + T_I s}$
se zpožděním 2. řádu	$T_2^2 u'' + T_1 u' + u = r_0 e + r_{-1} \int_0^t e(\tau) d\tau + r_1 \frac{de}{dt}$	$G_R(s) = \frac{r_0 \left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right]}{1 + T_I s + T_2^2 s^2}$

Typ	Přechodová charakteristika	Frekvenční charakteristika	Amplitudová logaritmická charakteristika
ideální			
se zpožděním 1. řádu			
se zpožděním 2. řádu			

6.2 Stavitelné parametry regulátorů

Ve vztazích (6.1) a (6.2) jsme se setkali s konstantami regulátorů r_0 , r_{-1} a r_1 a s časovými konstantami regulátorů T_I , T_D .

U skutečných regulátorů se setkáváme s ovládacími (nastavovacími) prvky, kterými lze určovat vlivnost (váhu) jednotlivých složek spojitého regulátoru a sice s pp [%] - pásmem proporcionality,

$$T_I = \frac{r_0}{r_{-1}} \text{ [s]} \quad \text{- integrační časovou konstantou,}$$

$$T_D = \frac{r_1}{r_0} \text{ [s]} \quad \text{- derivační časovou konstantou.}$$

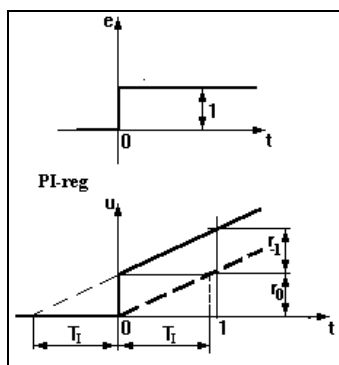
Vysvětleme si jejich interpretaci a praktický význam:

Pásmo proporcionality - pp [%]

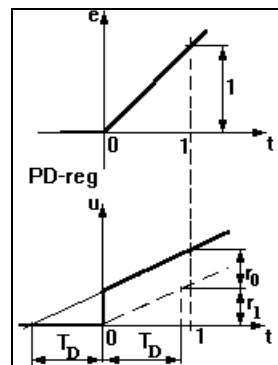
$$pp[\%] = \frac{1}{r_0} \cdot 100,$$

kde r_0 [-] je zesílení regulátoru.

Pásmo proporcionality určuje, o jakou hodnotu, vyjádřenou v procentech, se musí změnit vstupní signál regulátoru, aby se akční člen přestavil z jedné krajní polohy do druhé (změnil polohu z 0% na 100% nebo naopak).



Obr. 6.6 Přechodová charakteristika PI-regulátoru



Obr. 6.7 Přechodová charakteristika PD-regulátoru

Integrační časová konstanta - T_I [s]

$$T_I = \frac{r_0}{r_1} \text{ [s]}$$

a určíme ji u PI-regulátoru pro vstupní signál rovný jednotkovému skoku (obr. 6.6). Integrační časová konstanta je čas, který by potřeboval čistě integrační regulátor (přechodová charakteristika I-regulátoru je na obr. 6.7 čárkovaná), aby přestavil akční člen (výstupní signál) do polohy, které dosáhne PI-regulátor v čase $t = 0$ vlivem své proporcionalní složky.

Derivační časová konstanta - T_D [s]

$$T_D = \frac{r_1}{r_0} \text{ [s]}$$

Určíme ji u PD-regulátoru pro vstupní signál rovný jednotkové rychlosti (obr. 6.7). Derivační časová konstanta je čas, který by potřeboval čistě proporcionalní regulátor (přechodová charakteristika P-regulátoru je na obr. 6.7 zakreslena čárkovaně), aby přestavil akční člen (výstupní signál) do polohy, které dosáhne PD-regulátor v čase $t = 0$ vlivem své derivační složky.

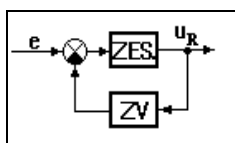
Rozsahy nastavení stavitelných parametrů regulátorů obvykle bývají:

- pásmo proporcionality: (2÷200)%
- integrační časová konstanta: (0,1 - 30) minut, ∞
- derivační časová konstanta: (0,1 - 30) minut.

Poznámka: Nastavením integrační časové konstanty na hodnotu ∞ jsme ji vyřadili z činnosti, což má význam při seřizování regulátoru.

6.2.1 Význam zpětné vazby u spojitých regulátorů

Ústřední člen regulátoru se nejčastěji konstruuje jako zesilovač se zpětnými vazbami.



Obr. 6.8 Blokové schéma ústředního členu regulátoru. ZES - zesilovač, ZV - zpětná vazba

Pro přenos regulátoru podle obr.6.8 bude:











$$G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = \frac{G_{ZES}(s)}{1 + G_{ZES}(s)G_{ZV}(s)} = \frac{1}{\frac{1}{G_{ZES}(s)} + G_{ZV}(s)}$$

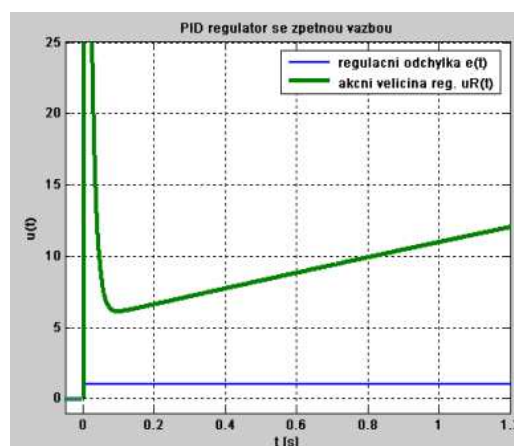
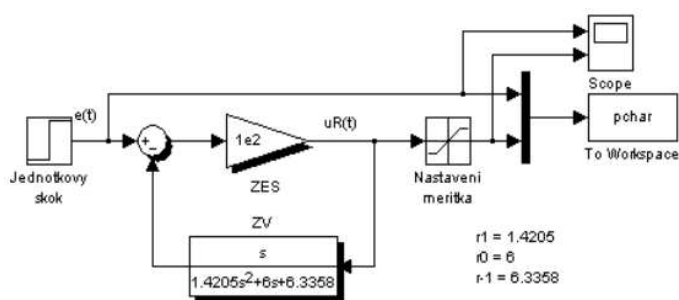
Pro velké zesílení zesilovače ($G_{ZES}(p) \gg 1$) bude platit

$$G_R(s) \approx \frac{1}{G_{ZV}(s)}$$

z čehož plyne, že dynamické vlastnosti regulátoru jsou určovány dynamickými vlastnostmi zpětné vazby. Druhy zpětné vazby, které určují dynamické vlastnosti jednotlivých typů regulátoru jsou uvedeny v tab. 4.

Tab. 4: Přiřazení druhu zpětné vazby k jednotlivým typům regulátoru

Typ	Regulátor	Zpětná vazba
	Přenos	Přenos
P	$G_R(s) = r_0$ 	$G_{ZV}(s) = \frac{1}{r_0}$ 
I	$G_R(s) = \frac{r_{-1}}{s}$ 	$G_{ZV}(s) = \frac{s}{r_{-1}}$ 
PI	$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$ 	$G_{ZV}(s) = \frac{s}{r_{-1} + r_0 s}$ 
PD	$G_R(s) = r_0 + r_1 s$ 	$G_{ZV}(s) = \frac{1}{r_0 + r_1 s}$ 
PID	$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$ 	$G_{ZV}(s) = \frac{s}{r_{-1} + r_0 s + r_1 s^2}$ 

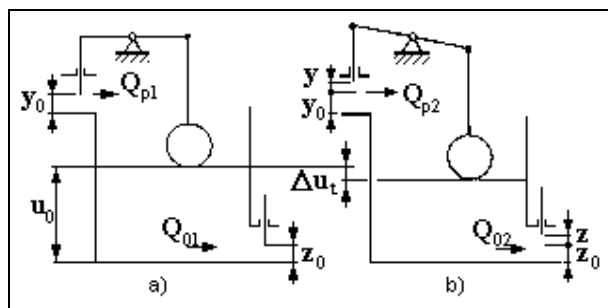


6.2.2 Charakteristika činnosti spojitých regulátorů

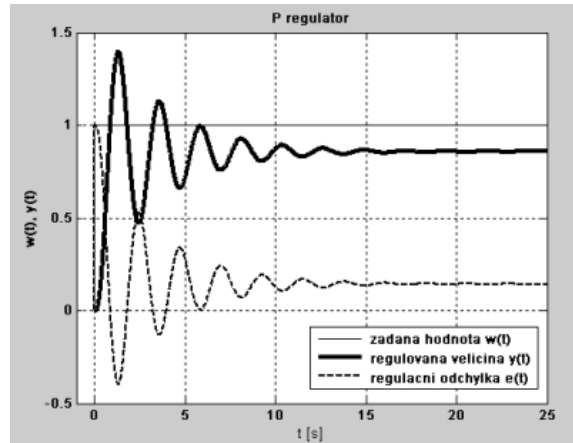
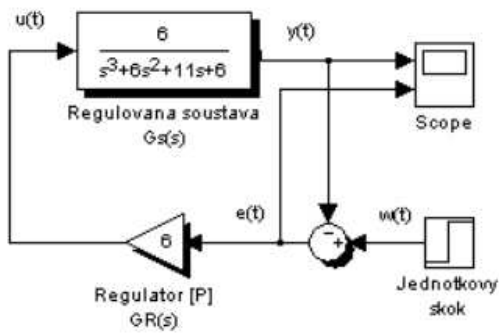
V předchozím jsme se zabývali popisem dynamických vlastností jednotlivých typů spojitých regulátorů. Pro uživatele je důležité, aby si uvědomil jejich charakteristické vlastnosti a činnost.

P-regulátor

Proporcionální regulátor je velmi jednoduchý, levný a stabilní. Je však nevýhodný tím, že pracuje s trvalou regulační odchylkou. Nejprve uvedeme příklad jejího vzniku. Budeme vycházet z rovnovážného stavu, který je na obr. 6.9.



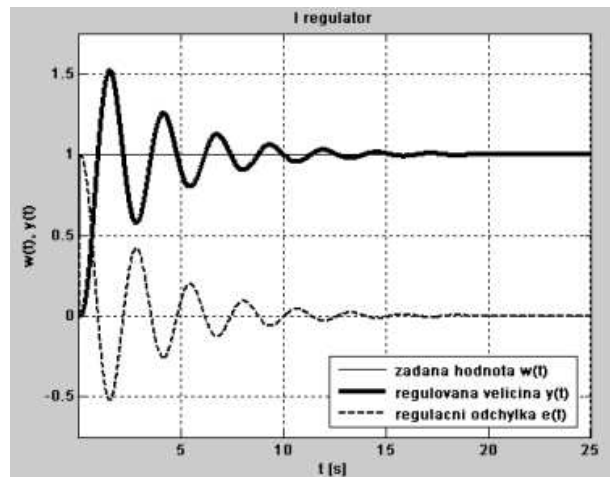
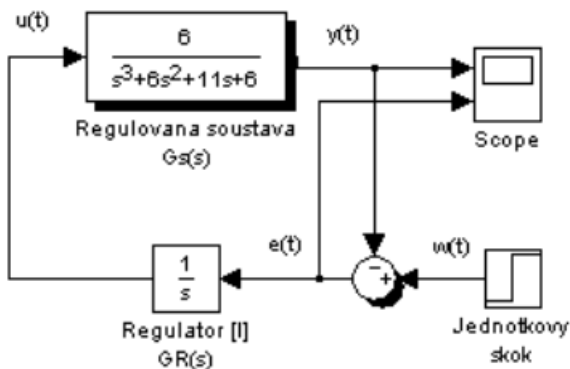
Obr. 6.9 Vznik trvalé regulační odchylky u regulátoru P; a) výchozí (rovnovážný) stav, b) stav po vyvolané změně



Pro rovnovážný stav platí, že přítok Q_{p1} se rovná odtoku Q_{o1} - výška hladiny x_o se nemění, je konstantní. Zvětšíme-li odtékající množství na Q_{o2} , vznikne nerovnovážený stav mezi přítokem a odtokem. Hladina začne klesat. Plovák sleduje pokles hladiny a zároveň akční člen zvětšuje přítok kapaliny do regulované soustavy. Tento nerovnovážený stav trvá tak dlouho, pokud $Q_{p2} \neq Q_{o2}$.

I-regulátor

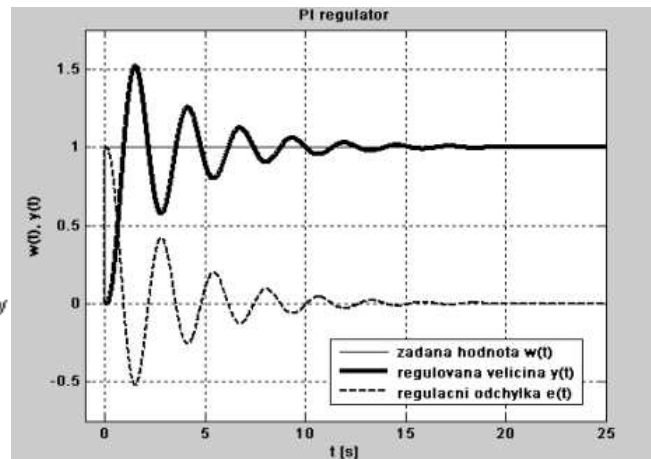
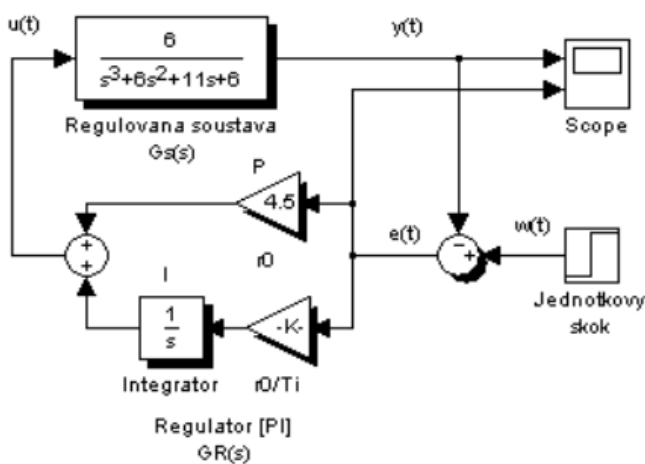
V uzavřeném regulačním obvodu pracuje pouze s přechodnou regulační odchylkou. Regulační pochod se ustálí tehdy, kdy regulační odchylka $e(t) = 0$. Nevyhoví podmínkám stability regulačního obvodu, když by měl regulovat astatickou regulovanou soustavu.



D-regulátor

Není schopen samostatné funkce, jako regulátor připojený k regulované soustavě, protože vstupním signálem je rychlost změny derivační odchylky a není tedy dána její okamžitá velikost. Proto připustí libovolně velkou ustálenou regulační odchylku. V kombinovaném regulátoru zlepšuje stabilitu regulačního obvodu. Natáčí fázi amplitudové fázové charakteristiky v komplexní rovině o $+90^\circ$. Informuje regulátor o změně regulační odchylky a tedy regulátor může v „předstihu“ na tuto změnu reagovat (urychluje zásah regulátoru).

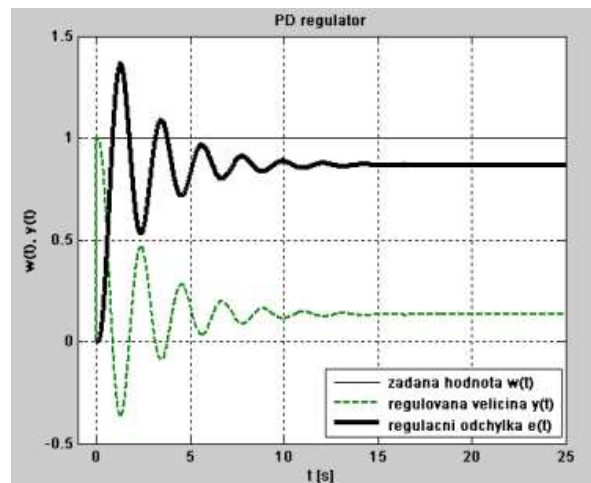
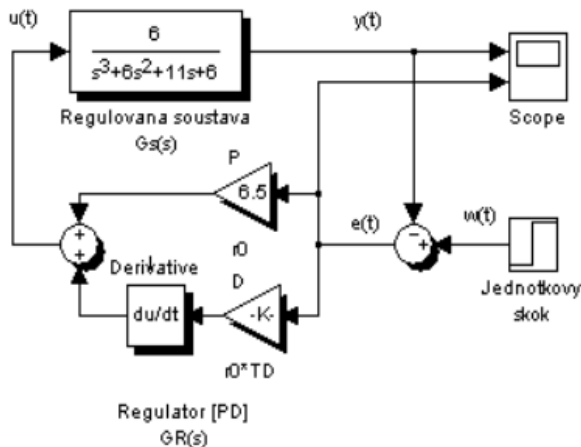
PI-regulátor



V uzavřeném regulačním obvodu odstraňuje trvalou regulační odchylku, kterou bychom měli při použití P-regulátoru. Zlepšuje stabilitu vzhledem k použití čistého I-regulátoru. Pro určitá nastavení parametrů regulátoru vyhovuje z hlediska stability i pro integrační regulované soustavy. V počátku regulačního pochodu převládá vliv proporcionální složky, s narůstajícím časem převládá vliv integrační složky.

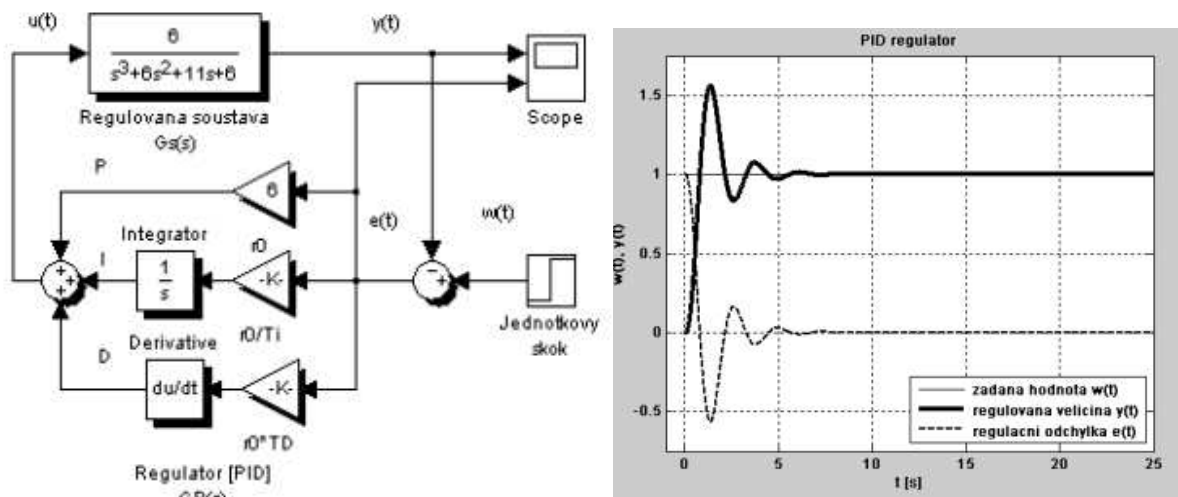
PD-regulátor

Zlepšuje stabilitu regulačního obvodu ve srovnání s použitím čistého P-regulátoru. Je tedy možné pracovat s vyšším zesílením regulátoru a tedy menší trvalou regulační odchylkou vzhledem k použití čistého P-regulátoru. V počátku regulačního pochodu převládá vliv derivační složky, s narůstajícím časem převládá vliv proporcionální složky; regulátor pracuje s přechodným zvýšeným zesílením.



PID-regulátor

V uzavřeném regulačním obvodu odstraňuje vlivem I složky trvalou regulační odchylku a vlivem D složky zlepšuje stabilitu regulačního obvodu. V počátku přechodového děje převládá derivační složka regulátoru, s narůstajícím časem převládá integrační složka regulátoru.



6.2.3 Interakce konstant regulátorů

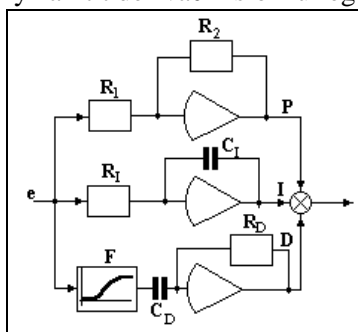
Jak jsme již uvedli, je přenos kombinovaného regulátoru PID tvořen třemi paralelními složkami regulátoru, tj. proporcionální, integrační a derivační. Odpovídající blokové schéma (obr. 6.5) lze realizovat v elektronickém regulátoru, kde jednotlivé složky jsou provedeny samostatně - zesilovači se zpětnými vazbami a se stavitelnými parametry regulátoru (obr. 6.10):

$$r_0 = R_2 / R_1 \quad - \text{ zesílení regulátoru,}$$

$$T_I = R_I C_I \quad - \text{ integrační časová konstanta,}$$

$$T_D = R_D C_D \quad - \text{ derivační časová konstanta.}$$

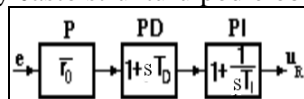
Filtr F je realizován proporcionálním členem 2. řádu, působí v derivační složce regulátoru a filtruje šумы a signály vyššího kmitočtu, které by mohly zahltnit derivační složku regulátoru.



Obr. 6.10 Elektronický regulátor PID bez interakce

Ze zapojení je zřejmé, že je použito tří zesilovačů. Každou složku lze nastavovat samostatně bez vzájemného ovlivňování, takový regulátor je nazýván regulátorem bez interakce. Jsou však i jiné koncepce a konstrukce regulátorů, např. elektronický regulátor pouze s jedním zesilovačem nebo pneumatické regulátory běžné koncepce (jsou i konstrukce bezinterakčního provedení pneumatického regulátoru). Tam, kde dochází k vzájemnému ovlivňování při nastavení jednotlivých konstant regulátoru - nastává interakce.

Např. pneumatické regulátory PID mívaly často strukturu podle obr. 6.11.



Obr. 6.11 Regulátor PID s interakcí realizovaný sériovým řízením regulátorů PD a PI

$$\text{Přenos takového regulátoru je: } G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = \bar{r}_0 (1 + sT_D) \left(1 + \frac{1}{sT_I}\right) = \bar{r}_0 \left[\left(1 + \frac{T_D}{T_I}\right) + sT_D + \frac{1}{sT_I} \right].$$

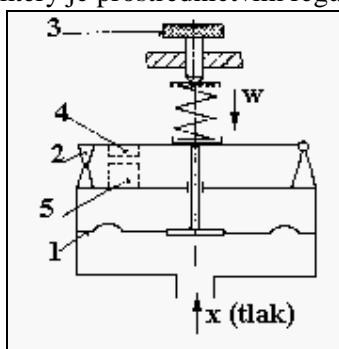
$$\text{Konstanty regulátoru jsou: } r_0 = \bar{r}_0 \left(1 + \frac{T_D}{T_I}\right) \quad [-], \quad r_1 = \bar{r}_0 T_D \quad [\text{s}], \quad r_{-1} = \frac{\bar{r}_0}{T_I} \quad [\text{s}^{-1}].$$

7. Nespojité regulátory

Nespojitý regulátor je regulátor, jehož výstupní signál nezávisí spojitě na vstupním signálu. Vyznačuje se tím, že akční veličina se nemění spojitě, nýbrž může nabývat pouze omezeného počtu hodnot. To znamená, že regulační orgán u nespojitých regulátorů může zaujmout dvě nebo více pevných poloh, přičemž jeho pohyb mezi pevnými polohami probíhá skokem. Podle počtu pevných poloh, které mohou nespojitě regulátory zaujmout, můžeme je rozdělit na dvupolohové a vícepolohové. Nespojitě regulátory patří mezi nejrozšířenější regulátory hlavně pro svoji jednoduchou konstrukci a cenovou dostupnost.

7.1 Dvupolohový regulátor

Nejjednodušším nespojitým regulátorem je regulátor dvupolohový u kterého při poklesu regulované veličiny pod žádanou hodnotu nabývá akční veličina určitou pevnou hodnotu a při překročení žádané hodnoty dosáhne jiné pevné hodnoty, zpravidla nulové. S činností dvupolohového regulátoru se seznámíme u regulátoru tlaku. Regulovaná veličina (tlak) se snímá pomocí membrány a porovnává se s veličinou žádanou, kterou si můžeme nastavit. Je-li regulovaný tlak nižší než tlak nastavený, jsou spínací kontakty spojeny a naopak, je-li regulovaný tlak vyšší než žádaný, kontakty se rozpojí. Tímto způsobem lze regulovat tlak dodávaný kompresorem, který je prostřednictvím regulátoru střídavě zapínán a vypínán.

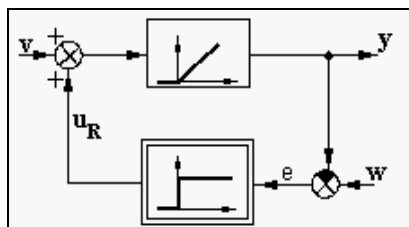


Obr. 7.1a Dvupolohový regulátor tlaku, 1 - membrána, 2 - kontakt, 3 - točítka (šroub) pro nastavení žádané hodnoty, 4 - ocelová destička, 5 - magnet

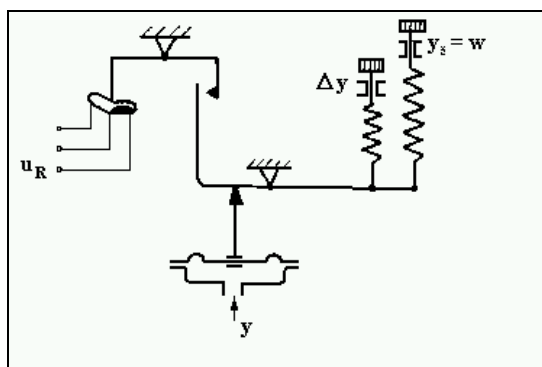
Předpokládejme regulační obvod podle obr. 7.1b, který je tvořen astatickou regulovanou soustavou bez setrvačnosti a dvupolohovým regulátorem. Jde o regulaci hladiny v otevřené nádrži.

Pro měření výšky hladiny - skutečné hodnoty regulované veličiny, se využívá hydrostatického působení sloupce kapaliny, takže lze použít jako regulátoru manostatu podle obr. 7.1c, který je vybaven membránovým převodníkem.

Kromě stavědla pro žádanou hodnotu y_z je regulátor vybaven stavědlem pro spínací diferenci regulované veličiny Δy . Pohyb z membránového převodníku tlaku je přenášen na výkyvnou páku vyvažovanou tahem obou pružin. Spínání a rozpínání obvodu akční veličiny u_R je provedeno rtuťovým spínačem.



Obr. 7.1b Blokové schéma regulačního obvodu s astatickou regulovanou soustavou a dvupolohovým regulátorem

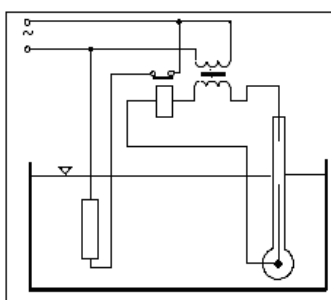


Obr. 7.1c Manostat - funkční schéma

7.2 Regulační obvod

Regulační pochod udává průběh regulované veličiny v regulačním obvodu a lze jej vyvolat změnou řídicí nebo poruchové veličiny. Mění-li se řídicí veličina (nastavení), je úkolem regulátoru co nejrychleji dosáhnout nové žádané hodnoty. Mění-li se poruchová veličina (zatížení), požadujeme, aby regulátor v co nejkratším čase odstranil vliv poruchové veličiny na regulovanou veličinu a udržel ji na žádané hodnotě.

a) Dvupolohový regulátor na soustavě proporcionální jednodukapacitní. Činnost dvupolohového regulátoru na proporcionální soustavě jednodukapacitní si vysvětlíme na příkladě regulace teploty v nádrži. Regulovaná soustava je tvořena vodní nádrží ohřivanou ponorným topným tělesem. Regulátor teploty, v našem případě kontaktní teploměr, který je napájen přes transformátor, ovládá pomocí relé zapínání topného tělesa. Regulovanou veličinou je teplota vody, akční veličinou elektrické napětí přiváděné na topné těleso (obr. 7.2).



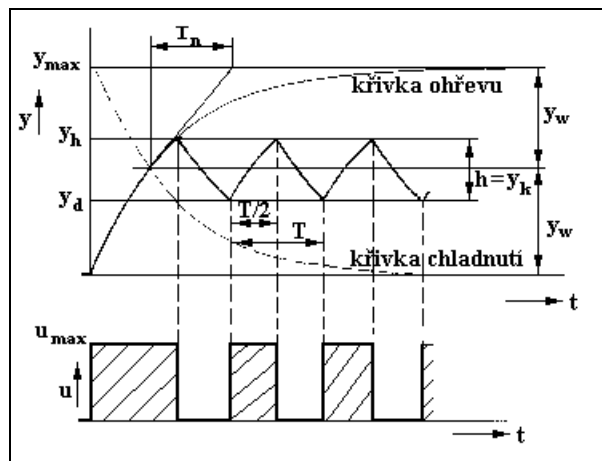
Obr. 7.2 Regulační obvod pro regulaci teploty

Po připojení zdroje napětí se teplota začne zvyšovat podle přechodové charakteristiky proporcionální soustavy jednodukapacitní (podle křivky ohřevu). Zvyšování teploty pokračuje až do té doby, kdy regulovaná veličina dosáhne hodnoty y_h . V tomto okamžiku rozpojovací kontakt relé přerušuje přívod elektrického proudu do topného tělesa. Teplota se bude snižovat podle přechodové charakteristiky proporcionální soustavy jednodukapacitní (podle křivky chladnutí). Jakmile se regulovaná veličina zmenší na hodnotu y_d , uzavře rozpojovací kontakt relé topný obvod a regulovaná veličina začne opět přibývat. Tento cyklus se stále opakuje. Regulovaná veličina bude trvale kmitat mezi hodnotami y_d a y_h .

Průběh regulované veličiny - regulační pochod a průběh akční veličiny jednodukapacitní soustavy s dvupolohovým regulátorem je na obr. 7.3. Charakteristickými veličinami regulačního pochodu v regulačním obvodu s nespojitým regulátorem jsou:

Šířka pásma kmitání regulované veličiny	y_k	Rozsah, ve kterém regulovaná veličina periodicky kmitá.
Perioda kmitu	T	Délka periody kmitání u nespojitého regulátoru
Frekvence (četnost) spínání	$F=1/T$	Počet zapnutí nebo vypnutí za časovou jednotku.

V našem případě dvupolohový regulátor udržuje regulovanou veličinu v mezích y_h a y_d . Šířka pásma kmitání je tedy shodná s hysterezí h a lze ji volbou velikosti hystereze ovlivnit.



Obr. 7.3 Dvupolohový regulátor na jednodukapacitní proporcionalní soustavě

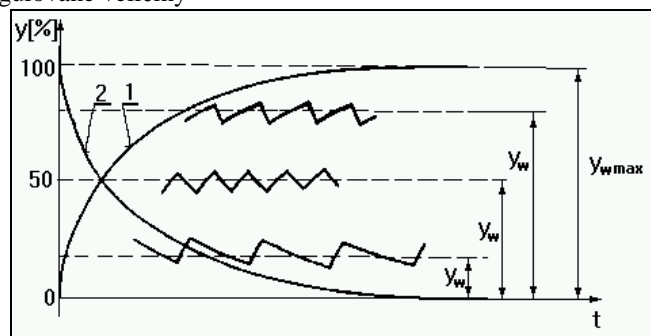
Při zmenšování hystereze h a zkracování doby náběhu T_n kmitočet f roste. To nepříznivě ovlivňuje životnost regulátoru. Proto v řadě případů, kde se nevyžaduje velká přesnost dodržování regulované veličiny a její větší kolísání není na závadu, volíme raději větší hysterezi. Život regulátoru tím prodloužíme.

Na průběh pracovních kmitů má rovněž vliv žádaná hodnota regulované veličiny, což je zřejmé z následujícího obr. 7.4, kde

1 - charakteristika zdroje - příkonu (křivka ohřevu)

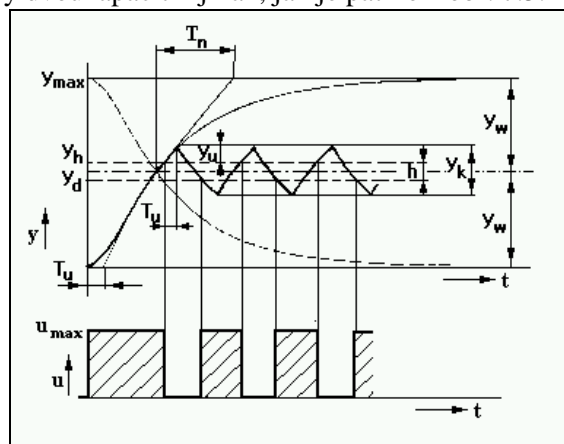
2 - charakteristika nádrže (křivka chladnutí)

y_w - různé žádané hodnoty regulované veličiny



Obr. 7.4 časový průběh pracovních kmitů dvupolohového regulátoru připojeného ke proporcionalní soustavě 1. řádu pro různé hodnoty y_w

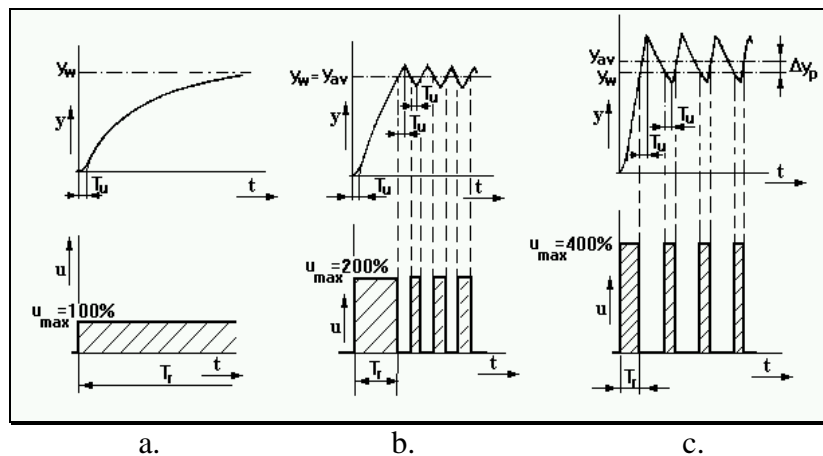
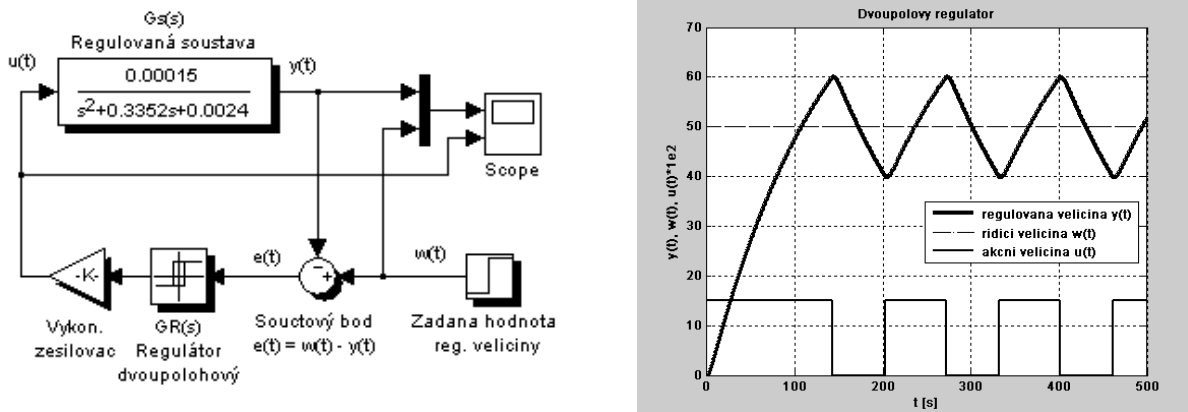
b) Dvupolohový regulátor na proporcionalní soustavě dvoukapacitní. Na rozdíl od soustavy jednodukapacitní, kde na šířku pásma kmitání regulované veličiny měla vliv pouze hystereze a vlastnosti soustavy se neuplatnily, je tomu u soustavy dvoukapacitní jinak, jak je patrné z obr. 7.5.



Obr. 7.5 Dvupolohový regulátor na dvoukapacitní proporcionalní soustavě

Při zapnutí nebo vypnutí akční veličiny nekolísá regulovaná veličina pouze v pásmu vymezeném hysterezí regulátoru. Je to způsobeno tím, že regulovaná veličina, i když dosáhne hodnoty y_h a akční veličina se přepojí na nulu, nezačne okamžitě ubývat, nýbrž dále narůstá. Je to způsobeno zpožděním v soustavě,

kteří je dáno velikostí doby průtahu T_u . Teprve po uplynutí T_u začne regulovaná veličina ubývat. Je zřejmé, že kmitání regulované veličiny se projeví i v případě kdy hystereze bude nulová.

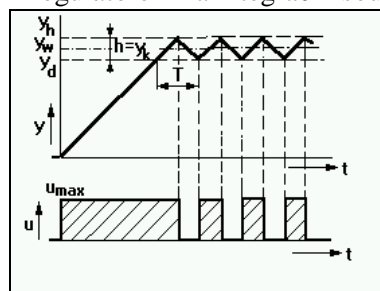


Obr. 7.6 Průběh regulované a akční veličiny při různých hodnotách rozsahu akční veličiny, a) 100% rozsah akční veličiny (0% nadbytek výkonu), b) 200% rozsah akční veličiny (100% nadbytek výkonu), c) 400% rozsah akční veličiny (300% nadbytek výkonu)

Doposud jsme se seznámili se třemi charakteristickými veličinami regulačního pochodu y_k , T a f . Další charakteristickou veličinou regulačního pochodu v regulačním obvodu s nespojitým regulátorem je doba rozběhu T_r . Je to doba potřebná k tomu, aby po zapnutí regulačního obvodu skutečná hodnota regulované veličiny poprvé dosáhla žádané veličiny. Tuto dobu lze ovlivnit volbou rozsahu akční veličiny, tj. změnou výkonu zdroje.

Čím je nadbytek výkonu větší, tím kratší je doba rozběhu. Se změnou akční veličiny se však mění kromě jiného i amplituda kmitání regulované veličiny y_k , která se rovněž zvětšuje s rostoucí akční veličinou. Na obr. 7.6 můžeme ještě sledovat další vliv změny akční veličiny, a to posunutí střední hodnoty regulované veličiny y_{av} . Pouze při 100% nadbytku výkonu se požadovaná hodnota shoduje se střední hodnotou regulované veličiny. V ostatních případech existuje regulační odchylka Δy_p . Proto je vhodné volit akční veličinu se 100% nadbytkem výkonu.

c) Dvoupolohový regulátor na integrační soustavě jednodukapacitní. Na obr. 7.7 je průběh regulované veličiny v regulačním obvodu s dvoupolohovým regulátorem na integrační soustavě jednodukapacitní.



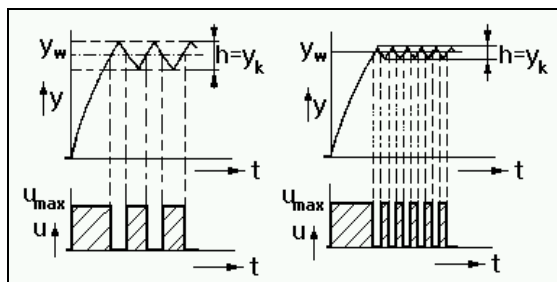
Obr. 7.7 Dvoupolohový regulátor na jednodukapacitní integrační soustavě

Regulovaná veličina trvale kolísá mezi hodnotami y_d a y_h

7.3 Opatření pro zkvalitnění regulačních pochodů řízených nespojitými regulátory

Charakteristickými veličinami regulačního pochodu v regulačním obvodu s nespojitým regulátorem jsou šířka pásma kmitání regulované veličiny y_k , doba rozběhu T_r a kmitočet spínání f , podle kterých můžeme posoudit jakost regulačního pochodu.

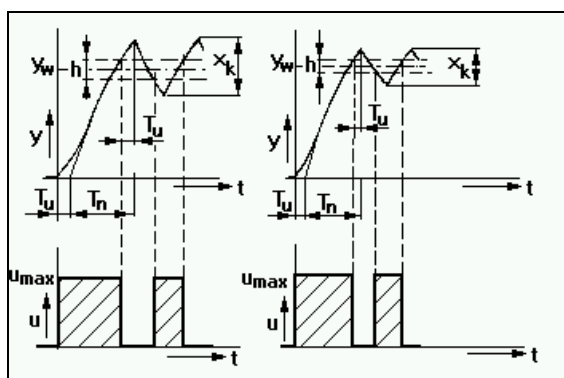
Dále se především zaměříme na nejdůležitější charakteristickou veličinu - kmitání regulované veličiny y_k . V některých případech nám nevadí větší kmitání regulované veličiny y_k , existují však četné případy, kde požadujeme, aby šířka pásma kmitání byla co nejmenší. Abychom mohli tento požadavek splnit, využijeme některého z uvedených způsobů.



Obr. 7.8 Zkvalitnění regulačního pochodu zmenšením hystereze

a) **Zmenšení hystereze** (obr. 7.8). Tohoto způsobu zúžení šířky pásma kmitání regulované veličiny y_k používáme pouze u regulovaných soustav jednodukapacitních. U ostatních regulovaných soustav je podíl hystereze na šířce pásma kmitání nepatrný (je však třeba si uvědomit, že se zmenšením hystereze narůstá frekvence spínání - život regulátoru se zkracuje).

b) **Zkrácení doby průtahu** (obr. 7.9). Jak je patrné z obr. 7.9, lze značně zúžit šířku pásma kmitání regulované veličiny zkrácením doby průtahu. Abychom však dosáhli zkrácení doby průtahu, musíme se postarat při návrhu regulačního obvodu o rychlý přenos signálu regulované veličiny na akční člen.

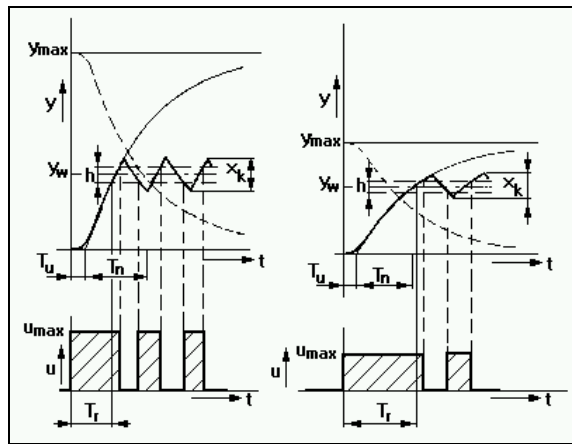


Obr. 7.9 Zkvalitnění regulačního pochodu zkrácením doby průtahu

Toho lze dosáhnout vhodným uspořádáním regulačního obvodu (měřící člen je co nejbližší k akčnímu členu, pokud tomu nebrání provozní podmínky), vhodným umístěním snímače (aby mohl co nejrychleji reagovat na změny regulované veličiny) a v poslední řadě použitím přístrojů s velmi dobrými dynamickými vlastnostmi.

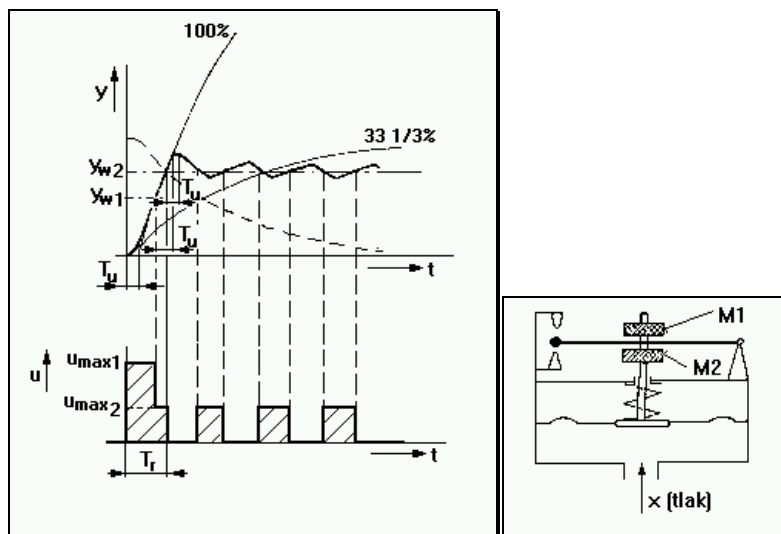
c) **Prodloužení doby náběhu**. Šířku pásma kmitání regulované veličiny lze zúžit i prodloužením doby náběhu, ale to má smysl pouze tehdy, pokud se současně neprodlouží i doba průtahu. Doba průtahu lze prodloužit zvětšením kapacity regulované soustavy. To lze uskutečnit pouze v těch případech, kde lze konstrukčně změnit regulovanou soustavu. Tak například, je-li regulovanou soustavou nádrž s kapalinou, lze jejím zvětšením dosáhnout delší doby náběhu a tím i příznivějšího kolísání regulované veličiny.

d) **Zmenšením maximální velikosti akční veličiny**. Další možnost, jak lze zúžit šířku pásma kmitání regulované veličiny, je zmenšit maximální hodnotu akční veličiny. Toto opatření je však nevýhodné tím, že zmenšováním maximální hodnoty akční veličiny se nejen zužuje šířka pásma kmitání, ale zároveň se prodlužuje doba rozběhu T_r . Většinou se však požaduje krátká doba rozběhu a abychom jí dosáhli, musíme mít k dispozici pokud možno co největší maximální hodnotu akční veličiny. Vidíme, že požadavky na jakostní regulační pochod, který by měl mít úzké pásmo kmitání regulované veličiny a zároveň i krátkou dobu rozběhu, jsou protichůdné a nelze je splnit pomocí jednoduchého dvoupolohového regulátoru.

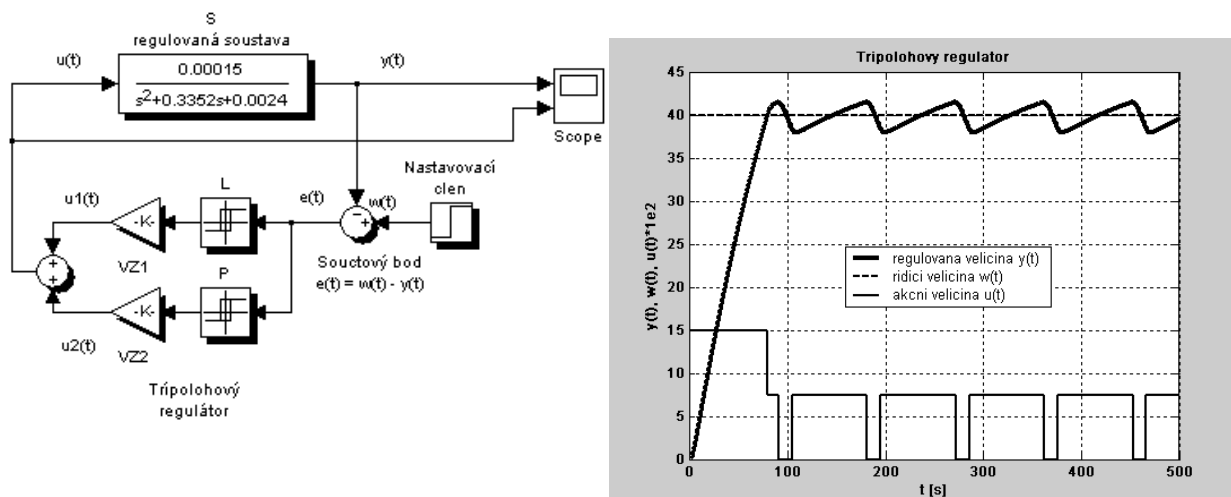


Obr. 7.10 Zkvalitnění regulačního pochodu zmenšením maximální velikosti akční veličiny resp. prodloužením doby náběhu

e) **Třípolohový regulátor.** Požadavek na krátkou dobu rozběhu a zároveň i úzké pásmo kmitání regulované veličiny umožní splnit třípolohový regulátor. U třípolohového regulátoru můžeme nastavit celkem tři hodnoty akční veličiny, a jestliže tyto hodnoty zvolíme vhodným způsobem, můžeme dosáhnout značného zkvalitnění regulačního pochodu (viz příklad regulace teploty v elektricky vytápěné peci na obr. 7.12). U elektrických pecí se velmi často používá regulace trojúhelník-hvězda-vypnuto. Při spojení topných těles do trojúhelníka má pec velký topný výkon, z čehož vyplývá velmi krátká doba rozběhu. Před dosažením žádané hodnoty se přepojí z trojúhelníka na hvězdu. Tím se topný výkon zmenší na 1/3. Vlastní regulace již probíhá s tímto výkonem.



Obr. 7.12 Třípolohový regulátor na dvoukapacitní proporcionalní soustavě

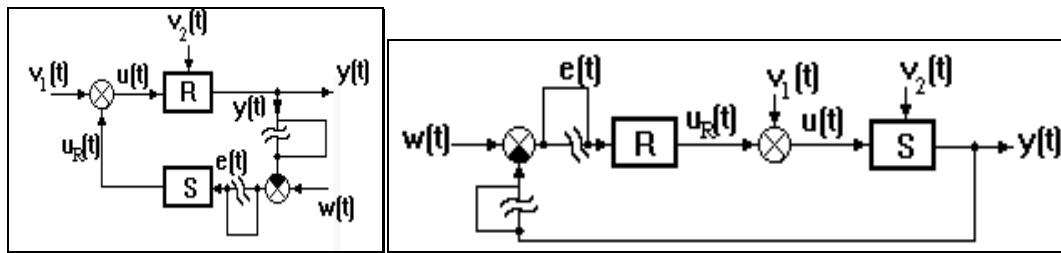


8. Regulační obvod

8.1 Přenos regulačního obvodu

Dosud jsme se zabývali vlastnostmi buď jen regulované soustavy (řízeného systému) nebo regulátoru. Regulační pochod probíhá v regulačním obvodu, který vzniká připojením regulátoru k regulované soustavě. (obr. 8.1). Výstupní veličinou regulačního obvodu je regulovaná veličina $y(t)$, vstupními veličinami jsou poruchové veličiny, např. $v_1(t)$, která působí na vstupu regulované soustavy a $v_2(t)$, která vstupuje do regulované soustavy někde v průběhu řízeného technologického procesu (obecně mohou být poruchové veličiny kladné nebo záporné, podle toho, jak se při jejich působení mění regulovaná veličina) a řídicí veličina $w(t)$. Rozdíl mezi $w(t)$ a regulovanou veličinou vytváří regulační odchylku $e(t)$ jako vstupní signál regulátoru:

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (8.1)$$



Obr. 8.1 Způsoby základního zapojení jednoduchého regulačního obvodu

Z fyzikálního hlediska je zřejmé, že regulátor pracuje tak, aby zmenšoval, popřípadě úplně odstranil regulační odchylku, tudíž jeho výstupní signál má opačné znaménko než signál vstupní (akční zásah jde proti regulačnímu zásahu).

Regulátor však ve všech rovnicích i přenosech uvažujeme jako člen s kladným výstupem, protože prakticky mění smysl signálu. Je to dohoda, kdy se změna znaménka přesune do jiného místa regulačního obvodu (na obr. 8.1 je v rozdílovém uzlu).

Dále se respektuje nepsaná dohoda, že přenos otevřeného regulačního obvodu má rovněž kladný smysl (znaménko), jako v sérii řazené dva kladné členy - regulátor a regulovaná soustava

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = G_R(s)G_S(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (8.2)$$

kde $M(s)$ je polynom čitatele přenosu,

$N(s)$ je polynom jmenovatele přenosu.

Z obr. 8.1 je zřejmé, že jsme rozpojením obvodu vyloučili změnu znaménka, abychom výše uvedené dohodě vyhověli.

Pro uzavřený regulační obvod (obě dvě přerušeni jsou překlenuta - viz obr. 8.1) za předpokladu, že vstupní signály budou

$$v_1(t) = v_2(t) = 0 \quad \text{a} \quad w(t) = 0 \quad (8.3)$$

tj., že na obvod nebude působit ani řídicí veličina ani poruchy, bude platit $e(t) = -y(t)$ a z toho

$$G_R(s)G_S(s) = -\frac{Y(s)}{E(s)} = -1,$$

takže dostáváme

$$1 + G_R(s)G_S(s) = 0 \quad \text{resp.} \quad 1 + G_0(s) = 0 \quad (8.4)$$

což je tvar charakteristické rovnice k diferenciální rovnici uzavřeného regulačního obvodu bez působení řízení i poruch ve tvaru

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (8.5)$$

Uvažujeme-li uzavřený regulační obvod u kterého nejsou splněny podmínky (8.3), pro jednoduchost uvažujeme, že regulační obvod má pouze jednu poruchovou veličinu, tj.

$$v_2(t) = 0, \quad v(t) = v_1(t) \neq 0$$

a řídicí veličinu

$$w(t) \neq 0$$

(porovnejme se zapojením na obr. 8.1), můžeme sestavit rovnice součtového a rozdílového uzlu

$$U(s) = V(s) + U_R(s),$$

$$E(s) = W(s) - Y(s)$$

a rovnice závislostí mezi vstupními a výstupními veličinami bloků

$$U_R(s) = G_R(s) E(s),$$

$$Y(s) = G_S(s) U(s).$$

Vyloučením všech veličin kromě vstupních a výstupních, obdržíme Laplaceův obraz rovnice uzavřeného regulačního obvodu při působení poruchy a řízení

$$Y(s)[1 + G_R(s)G_S(s)] = G_S(s)V(s) + G_R(s)G_S(s)W(s) \quad (8.6)$$

ze které pro podmínku, že $v(t) = 0$ určíme přenos řízení

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \quad (8.7)$$

a pro podmínku, že $w(t) = 0$ určíme zase přenos poruchy

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \quad (8.8)$$

Nyní můžeme definovat cíl řízení, který je zadán podmínkou, aby výstupní signál $y(t)$ byl roven (v ideálním případě) žádanému signálu $w(t)$ bez ohledu na škodlivé působení poruchového signálu $v(t)$, tj. musí platit

$$y(t) = w(t) \quad (8.9)$$

Z již dříve uvedeného víme, že přenos resp. diferenciální rovnice regulované soustavy má pevně stanovené koeficienty na rozdíl od regulátoru, u kterého přenos resp. diferenciální rovnice obsahuje některé koeficienty ovlivnitelné seřízením nastavitelných parametrů regulátoru.

Je zřejmé, že pro velký přenos regulátoru, ($G_R(s) \gg 1$), cíl řízení (8.9) se naplní tehdy, bude-li přenos řízení (8.7) a přenos poruchy (8.8)

$$G_w(s) = 1,$$

$$G_v(s) = 0,$$

Všimněme si, že oba odvozené přenosy (8.7, 8.8) mají stejného jmenovatele. Položíme-li jej roven nule, obdržíme charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu bez působení řízení a poruch. Dosadíme-li do rovnice přenosy konkrétního regulátoru a regulované soustavy a provedeme-li úpravu vztahu, pak charakteristická rovnice má tvar charakteristického polynomu

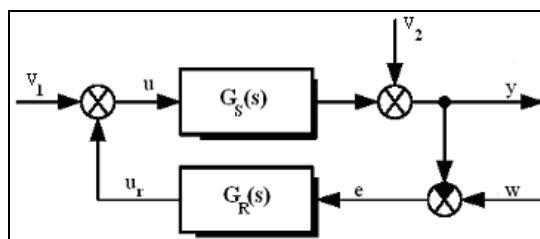
$$a_n s^n + n_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (8.10)$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice i její charakteristická rovnice jsou určující pro řešení stability uzavřeného regulačního obvodu.

Příklad: Vypočítejme přenosy řízení a poruchy pro regulační obvod znázorněný na obr. 8.2 a pro zadané přenosy integrační regulované soustavy a PD-regulátoru

$$G_S(s) = \frac{3}{s(s+2)^3}, \quad G_R(s) = r_0 + r_1 s.$$

Stanovme charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu.



Obr. 8.2 Regulační obvod

Řešení: Přenos řízení uzavřeného regulačního obvodu bude pro $v=0$ resp. $w=0$.

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{\frac{3(r_0 + r_1s)}{s(s+2)^3}}{1 + \frac{3(r_0 + r_1s)}{s(s+2)^3}} = \frac{3(r_0 + r_1s)}{s^4 + 6s^3 + 12s^2 + (3r_1 + 8)s + 3r_0}$$

Přenos poruchy

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{3}{s^4 + 6s^3 + 12s^2 + (3r_1 + 8)s + 3r_0}$$

Charakteristický polynom k homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními součiniteli má tvar

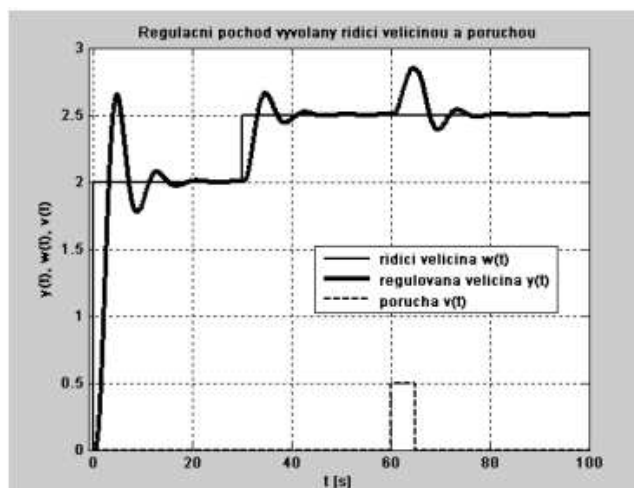
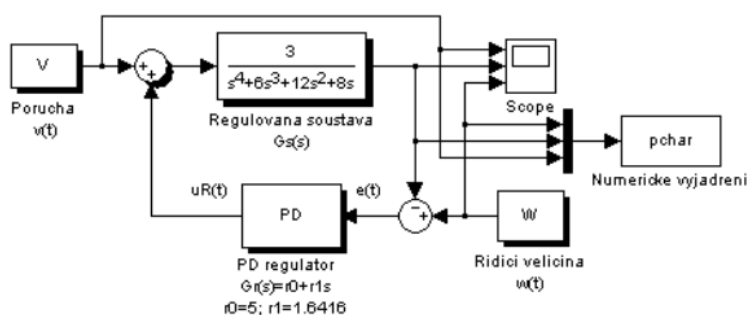
$$s^4 + 6s^3 + 12s^2 + (3r_1 + 8)s + 3r_0 = 0,$$

$$s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

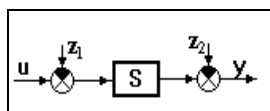
Obecně:

Vidíme, že součinitel a_1 obsahuje konstantu regulátoru r_1 a součinitel a_0 obsahuje konstantu regulátoru r_0 .

Součinitele a_1 i a_0 jsou ovlivnitelné seřízením regulátoru.



Příklad: Určeme rovnici regulované soustavy, regulátoru a regulačního obvodu tlakové nádoby podle následujícího obrázku.



a) Rovnice regulované soustavy

Při regulaci průtoku vycházíme z rovnice (pro jednoduchost $z_1 = 0$ a $z_2 = z$)

$$c_1 u_1(t) = c_2 [y(t) - z(t)] + c_3 y'(t)$$

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u_1(t) + a_0 z(t)$$

nebo

$$T y'(t) + y(t) = k_s u_1(t) + k_s z(t)$$

kde $T = \frac{a_1}{a_0}$ $k_s = \frac{1}{a_0}$

1) Polohu regulačního orgánu změním skokem o $\Delta u_1(t) = 0,4$ cm. Ze zjištěného grafu regulované veličiny zjistíme časovou konstantu $T = 1,1$ s a změnu tlaku $\Delta y = 0,24$ MPa. Pak

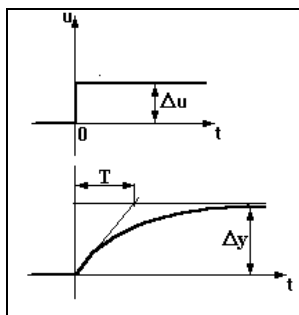
$$a_0 = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{0,4}{0,24} = 1,66 \text{ cm / MPa}$$

$$a_1 = T \cdot a_0 = 1,1 \cdot 1,66 = 1,83 \text{ cm} \cdot \text{s} / \text{MPa}$$

nebo

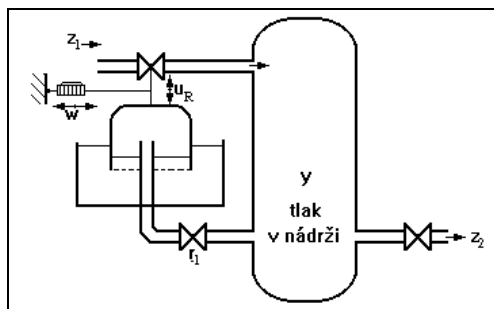
$$k_s = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6$$

$$T = 1,1 \text{ s}$$

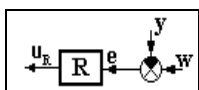


2) Rovnice regulované soustavy má tvar

$$1,83y'(t) + 1,66y(t) = u(t)$$



b) Rovnice regulátoru:



$$mu_R''(t) + c_3u_R'(t) = c_1y(t)$$

setrvačná síla $mu_R''(t)$

tlumící síla $c_3u_R'(t)$

hnací síla $c_1y(t)$

$$\frac{m}{c_3}u_R''(t) + u_R'(t) = \frac{c_1}{c_3}y(t)$$

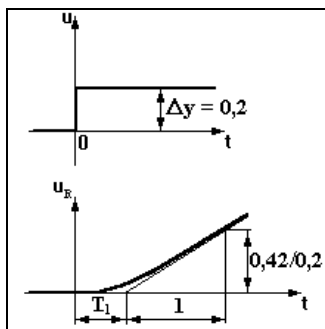
$$T_1u_R'(t) + u_R(t) = r_{-1}\int y(t)dt$$

Určeme koeficienty regulátoru

1) Vyvolíme skok pro tlakový rozdíl $\Delta y(t) = 0,2$ atp a po proběhnutí přechodového děje byla zjištěna rychlost $u_R = 0,42$ cm/s. Přechodový jev má časovou konstantu, kterou odměříme $T_1 = 0,7$ s.

$$u'(t) = r_{-1}y(t)$$

$$0,42 = r_{-1} \cdot 0,2 \Rightarrow r_{-1} = \frac{0,42}{0,2} = 2,1 \text{ cm / MPa} \cdot \text{s}$$



2) Rovnice regulátoru má tvar

$$0,7u_R'(t) + u_R(t) = 2,1\int y(t)dt$$

c) Přenos regulačního obvodu můžeme vytvořit následovně:

Přenos regulátoru:

$$G_R(p) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\frac{r_{-1}}{s}}{(1 + T_1 s)} = \frac{2,1}{(0,7s + 1)s}$$

Přenos soustavy:

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_0 + a_1 s} = \frac{1}{1,83s + 1,66}$$

resp.

$$\frac{k_S}{1 + T_1 s} = \frac{0,24}{1 + 1,1s} = \frac{0,6}{1 + 1,1s}$$

Přenos řízení uzavřeného regulačního obvodu:

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{\frac{2,1}{(0,7s + 1)s} \cdot \frac{1}{1,83s + 1,66}}{1 + \frac{2,1}{(0,7s + 1)s} \cdot \frac{1}{1,83s + 1,66}}$$

$$= \frac{2,1}{0,7 \cdot 1,8^3 s^3 + (0,7 \cdot 1,66 + 1,83)s^2 + 1,66s + 2,1} = \frac{2,1}{1,28s^3 + 2,99s^2 + 1,66s + 2,1}$$

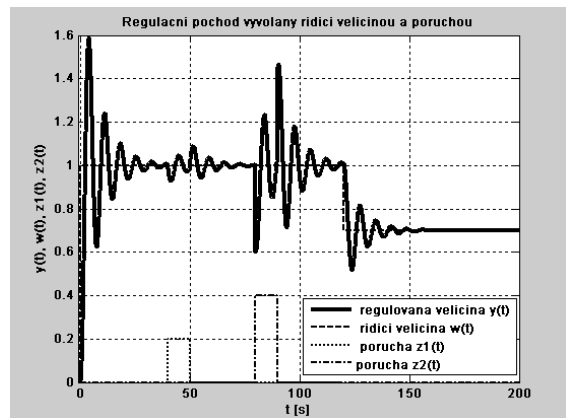
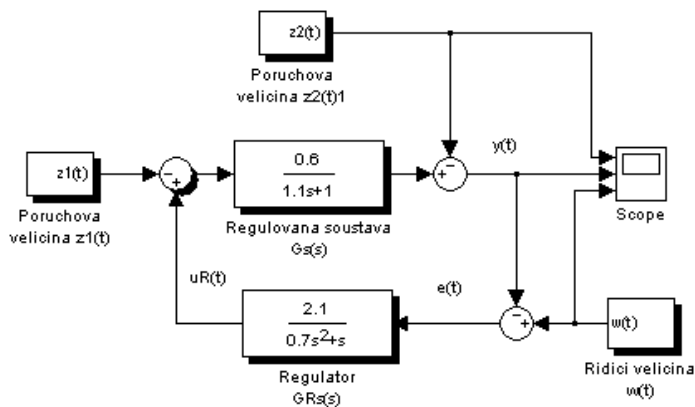
Zdůrazněme, která hlediska sledujeme při naplňování cílů řízení uzavřeného regulačního obvodu:

1) stabilita - která sleduje, zda uzavřený regulační obvod vyvedený z rovnovážného stavu vlivem působení poruchy nebo vlivem změny hodnota řídicí veličiny se opět ustálí, tj. zda zaujme původní nebo jiný, ale opět rovnovážný stav.

2) jakost regulačního pochodu a to:

a) podle průběhu regulačního pochodu (T_w , T_n , překmity, aperiodicita)

b) podle odchylky v ustáleném stavu (přesnost regulace)



8.2 Stabilita regulačního obvodu

Regulační pochod v lineárních regulačních obvodech s konstantními parametry je popsán lineárními diferenciálními rovnicemi obecně n -tého řádu

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m w^{(m)}(t) + \dots + b_1 w'(t) + b_0 w(t) \text{ nebo } c_m v^{(m)}(t) + \dots + c_1 v'(t) + c_0 v(t) \quad (8.11)$$

kde $y(t)$ je regulovaná veličina, přičemž pravá strana lineární diferenciální rovnice je modifikována podle toho, která z veličin, tj. řídicí $w(t)$ nebo poruchová veličina $v(t)$, regulační pochod vyvolala.

Označíme-li přenos lineárního regulačního obvodu (viz obr. 8.1) $G(s)$ a obecně vstupní signál $m(t)$, (což je buď $w(t)$ nebo $v(t)$), je Laplaceův obraz regulované veličiny (výstupní) $y(t)$ dán výrazem

$$Y(s) = G(s)M(s) + G_p(s) \quad (8.12)$$

kde $G_p(s)$ je operátorem počátečních podmínek.

Zpětnou transformací získáme časový průběh $y(t)$

$$y(t) = L^{-1}\{G(s)M(s) + G_p(s)\} = y_{part}(t) + y_{hom}(t)$$

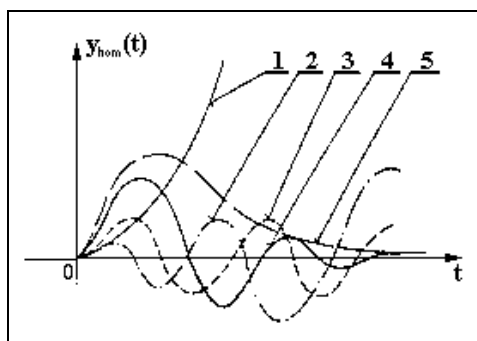
$y_{part}(t)$ je partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice (8.11) závislé na její pravé straně a je tedy vnucenou složkou regulované veličiny.

$y_{hom}(t)$ je obecné řešení homogenní diferenciální rovnice (8.11) a popisuje chování regulované veličiny po dobu přechodového děje. Je určeno počátečními podmínkami a počátečními hodnotami vstupního signálu $m(t)$. Charakter přechodové složky regulované veličiny je dán přenosem $G(s)$.

Regulační obvod je stabilní, jestliže se obecné řešení $y_{hom}(t)$ s rostoucím časem blíží k nule

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{hom}(t) = 0 \quad (8.12)$$

tj. když se obvod ustálí. Typické průběhy $y_{hom}(t)$ jsou nakresleny na obr. 8.3.



Obr. 8.3 Typické průběhy $y_{hom}(t)$

- 1- regulační pochod nestabilní aperiodický
- 2- regulační pochod nestabilní periodický
- 3- regulační pochod na hranici stability
- 4- regulační pochod stabilní periodický
- 5- regulační pochod stabilní aperiodický

Konstantní součinitelé a_n, \dots, a_0 homogenní diferenciální rovnice jsou konstantami regulované soustavy a regulátoru. Je vhodné si uvědomit, že dynamické vlastnosti samotné regulované soustavy jsou dány konstrukcí technologických zařízení a vlastním technologickým procesem a nemůžeme je prakticky při seřizování regulačního obvodu měnit. Chování regulátoru můžeme v určitých mezích ovlivnit seřizováním nastavitelných parametrů regulátoru. Tím je možné také v určitých mezích ovlivnit hodnoty součinitelů a_0, \dots s cílem splnění podmínky (8.12).

Z uvedeného vyplývá, že rozhodující pro posouzení stability uzavřeného regulačního obvodu je charakteristická rovnice - homogenní lineární diferenciální rovnice

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (8.14)$$

jejíž řešení je

$$y_{hom}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

kde $s_i = \alpha \pm j\omega$ jsou nenásobné kořeny charakteristické rovnice uzavřeného lineárního regulačního obvodu.

Kořeny s_i určíme řešením charakteristického polynomu (8.15) získaného z homogenní lineární diferenciální rovnice (8.14), kterou vypočteme zavedením partikulárního řešení

$$y = e^{st}$$

a která má potom tvar

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (8.15)$$

Reálné kořeny $s_i = \alpha_i$ určují aperiodické složky řešení:

$$y_{hom}(t) = C_i e^{-\alpha_i t}.$$

Komplexně sdružené kořeny $s_{i, i+1} = \alpha_i \pm j\omega_i$ určují periodické složky řešení

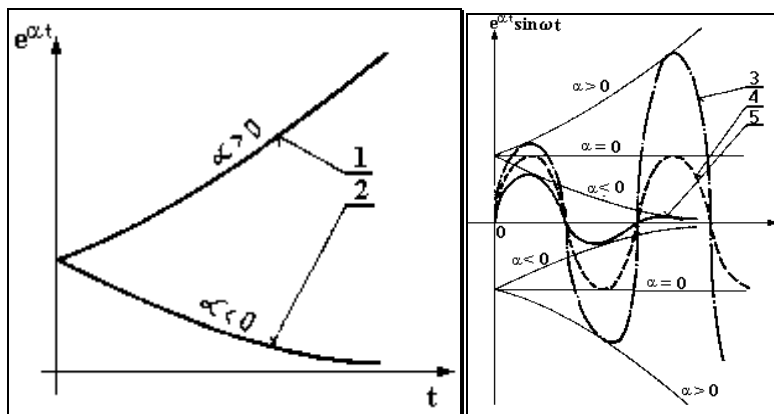
$$y_{\text{hom}}(t) = C_i e^{(-\alpha_i + j\omega_i)t} + C_{i+1} e^{(-\alpha_i - j\omega_i)t} = \dots + e^{\alpha t} (C_k \sin \omega t + C_{k+1} \cos \omega t) \dots$$

Pokud $\alpha_i = 0$, tj. $s_{i, i+1} = \pm j\omega_i$, jde o kořeny ryze imaginární sdružené a určují kmitavě netlumené složky řešení s konstantní amplitudou.

Pokud charakteristická rovnice (8.14) má m násobný reálný kořen s_1 , potom řešení lze psát ve tvaru

$$y_{\text{hom}}(t) = (C_{11} + C_{12}t + C_{13}t^2 + \dots + C_{1m}t^{m-1})e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots$$

Podmínkou pro stabilitu uzavřeného lineárního regulačního obvodu je, aby všechny kořeny charakteristické rovnice obvodu měly zápornou reálnou část, čili aby ležely v levé polovině komplexní roviny „ s “ (obr.8.4). V případě



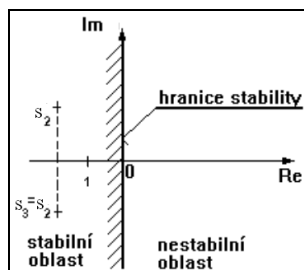
Obr. 8.4a Průběhy složek řešení rovnice (8.14) v závislosti na kořenech charakteristické rovnice (8.15)

a - aperiodické průběhy:

- 1 - nestabilní ($\alpha > 0$),
- 2 - stabilní ($\alpha < 0$)

b - periodické průběhy:

- 3 - nestabilní ($\alpha > 0$),
- 4 - na mezi stability - labilní ($\alpha = 0$),
- 5 - stabilní ($\alpha < 0$)



Obr. 8.4b Rozložení kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině

Charakteristickou rovnici (8.15) homogenní lineární diferenciální rovnice (8.14) uzavřeného regulačního obvodu můžeme získat i ze vztahu (8.4), tj. výpočtem pomocí přenosu otevřeného regulačního obvodu.

Závěry, které lze provést z tvaru charakteristické rovnice:

1. Nutnou, ale nepostačující podmínkou stability je, aby všechny koeficienty a_0, a_1, \dots charakteristické rovnice měly stejné znaménko a žádný z nich nesmí být roven nule. Počet koeficientů je $n + 1$, je-li n stupeň charakteristické rovnice. Pokud máme charakteristickou rovnici druhého stupně, tedy kvadratickou, stává se tato podmínka postačující. Uvedené podmínky jsou spojovány se jménem Stodola¹⁶.

¹⁶ Prof. Ing. Aurel Boreslav Stodola, Dr. h. c. (1859, Liptovský Mikuláš – 1942, Zürich, Švýcarsko) byl vynikající slovenský fyzik, technik, světově uznávaný zakladatel teorie parních a plynových turbin. Ve své vědecké činnosti se zaměřoval na oblast teorie automatické regulace strojů, položil vědecké základy projekce a stavby parních a spalovacích turbin. Pro vodní páru vypočítal a aplikoval tzv. Mollierův entropický diagram, který stále doplňoval. Ve spolupráci s chirurgem Ferdinandem Sauerbruchem zkonstruoval 1915 pohyblivou umělou ruku, tzv. Stodolovu. Na stejném principu byly založeny i protézy chodidel a noh. Největší úspěchy dosáhl v oboru parních turbin a jeho výpočty a konstrukce daly základ tomuto odvětví strojařství.

2. Je-li charakteristická rovnice třetího a vyššího stupně a všechny koeficienty mají stejné znaménko a jsou různé od nuly, stabilita regulačního obvodu je závislá na velikosti jednotlivých koeficientů a je nutné ji řešit, např. pomocí některého z kritérií stability.

Při praktickém určování stability regulačního obvodu lze použít následující postup:

Přenos rozpojeného obvodu, který je součinem přenosu soustavy a přenosem regulátoru vyjádříme ve tvaru polynomů ($G_0(s)$ je přenos rozpojeného obvodu)

$$G_0(s) = G_R(s)G_s(s) = \frac{M_0(s)}{N_0(s)}$$

a pak můžeme psát

$$1 + G_s(s) = 1 + \frac{M_0(s)}{N_0(s)} = \frac{M_0 + N_0(s)}{N_0(s)} = 0$$

a charakteristickou rovnici možno psát jako součet polynomů čitatele a jmenovatele rozpojeného obvodu $G_0(s)$

$$M_0 + N_0(s) = 0$$

Příklad: Sestavme charakteristickou rovnici regulačního obvodu a rozhodněme o stabilitě regulačního obvodu. Je dán přenos regulované soustavy $G_s(s) = \frac{2}{3s+1}$ a PID regulátoru $G_R(s) = 3\left(1 + \frac{1}{4s} + 8s\right)$

Řešení: Přenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = G_R(s)G_s(s) = \frac{2}{3s+1} \cdot 3\left(1 + \frac{1}{4s} + 8s\right) = \frac{96s^2 + 12s + 3}{6s^2 + 2s}$$

Charakteristickou rovnici získáme pomocí vztahu

- $1 + G_0(s) = 0$, a pak platí $1 + \frac{96s^2 + 12s + 3}{6s^2 + 2s} = 0$, $102s^2 + 14s + 3 = 0$
- nebo $M_0 + N_0(s) = 0$, $96s^2 + 12s + 3 + 6s^2 + 2s = 0$, $102s^2 + 14s + 3 = 0$.

Zda je obvod stabilní nebo nestabilní určíme pomocí kořenů charakteristické rovnice

$$s_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 102 \cdot 3}}{2 \cdot 102} = -0,07 \pm j0,16$$

Regulační obvod je stabilní, kořeny mají reálnou část zápornou.

Řešení v MATLABu :

% Vyšetření stability regulačního obvodu:

% $1 + G_0(s) = s^3 + 2s^2 + s + 4 / (2s + 1)^2 (0.1s + 1) (3s + 4) (s^2 + 2s + 2)$.

Ys=[1,2,1,4]; % Zadání čitatele přenosu.

a=conv(conv([2,1],[2,1]),[0.1,1]); % Vypočet jmenovatele přenosu.

b=[3,4];

c=[1,2,2];

Ws=conv(conv(a,b),c);

G=tf(Ys,Ws)

% Vyjádření obrazového přenosu.

r=roots(Ws)

% Vypočet kořenu polynomu jmenovatele.

syms s t;

% Funkce pro práci s neurčitými proměnnými.

% Vykreslení přechodové funkce.

step(G,30),grid

% Inverzní Laplaceova funkce pro získání přechodové funkce,

% čísla získáme z přenosové funkce tf.

ilaplace((s^3+2*s^2+s+4)/(1.2*s^6+17.2*s^5+61.9*s^4+108.8*s^3+102.6*s^2+46.8*s+8)*1/s)

Transfer function:

$$s^3 + 2s^2 + s + 4$$

$$1.2s^6 + 17.2s^5 + 61.9s^4 + 108.8s^3 + 102.6s^2 + 46.8s + 8$$

Koreny charakteristicke rovnice uzavreného regulacního obvodu:

$r =$

$$-10.0000$$

$$-1.0000 + 1.0000i$$

$$-1.0000 - 1.0000i$$

$$-1.3333$$

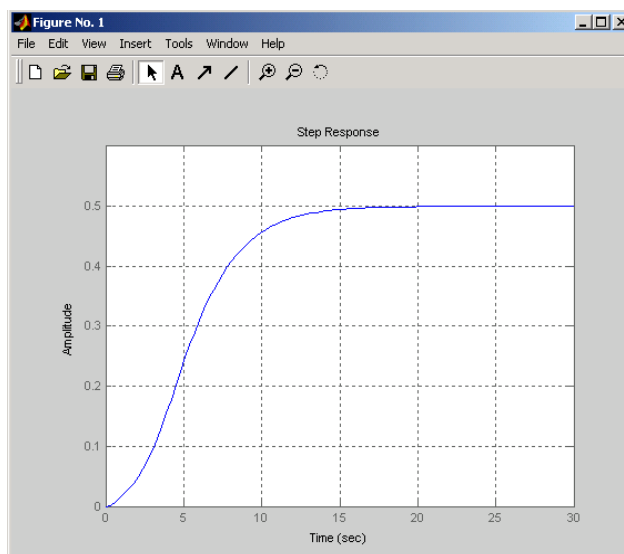
$$-0.5000 + 0.0000i$$

$$-0.5000 - 0.0000i$$

$ans =$

$$-62/95 * t * \exp(-1/2 * t) + 40/361 * \exp(-1/2 * t) - 31/29602 * \exp(-10 * t) - 9/25 * \exp(-4/3 * t) + 1/2 - 256/1025 * \exp(-t) * \cos(t) -$$

$$-33/1025 * \exp(-t) * \sin(t)$$



8.3 Kritéria stability

Kritéria stability lineárních stacionárních spojitych systémů umožní rozhodnout o stabilitě uzavřeného regulačního obvodu (systému) bez výpočtu jeho pólů resp. charakteristických čísel. Stručně se o některých kritériích stability zmíníme.

8.3.1 Algebraická kritéria stability

Tato kritéria vycházejí z charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (8.17)$$

resp. z charakteristického polynomu uzavřeného regulačního obvodu, který se rovná jmenovateli přenosu řízení (8.7) nebo přenosu poruchy (8.8) a má tvar

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Algebraická kritéria se nemohou použít při vyšetřování stability obvodů s dopravním zpožděním. Dávají možnost k rozhodnutí, zda je nebo není obvod stabilní, ale nedávají informaci do jaké míry je obvod tlumený.

Při použití algebraických kritérií je třeba znát:

- 1) z čeho kritérium vychází,
- 2) algoritmus výpočtu,
- 3) pravidlo pro rozhodnutí.

Routhovo-Schurovo kritérium stability

Vychází z charakteristického polynomu uzavřeného regulačního obvodu a při jeho použití dodržujeme následující postup (za předpokladu splnění podmínek, že $a_0, a_1, \dots, a_n > 0$):

- koeficienty charakteristického polynomu resp. charakteristické rovnice napíšeme vedle sebe a to od nejvyšší nebo nejnižší mocniny;

- tuto posloupnost koeficientů rozdělíme na část sudou a lichou (např. tak, že každý sudý koeficient podtrhneme);
- každý sudý koeficient násobíme podílem prvních dvou koeficientů a napíšeme pod předcházející řadu posunutou o jeden koeficient vlevo;
- tuto novou řadu koeficientů odečteme od předcházející;
- jsou-li všechny koeficienty v nové posloupnosti kladné, opakujeme postup, čímž se zkrátí o jeden člen;
- jakmile se při některé redukci objeví některý koeficient záporný, skončíme výpočet, neboť lze učinit závěr, že charakteristická rovnice má nestabilní kořen;
- dospějeme-li postupnou redukcí až k řadě tří kladných koeficientů můžeme učinit závěr, že charakteristická rovnice má všechny kořeny ve stabilní oblasti.

Poznámka: Násobení podílem prvních dvou koeficientů prvního sudého koeficientu v řadě, zapsání výsledku pod předcházející řadu posunutou o jeden koeficient vlevo a jeho odečtení od prvního koeficientu předcházející řady je principem redukce řady charakteristické rovnice.

Praktické použití popsaného algoritmu si ukážeme na příkladech.

Příklad: Routh-Schurovým kritériem vyšetřeme stabilitu regulačního obvodu, jehož charakteristický polynom má tvar

$$f(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Konkrétně např.: $f(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 6s + 1$.

Řešení: Posloupnost a její rozdělení na sudou a lichou část bude (sudé členy jsou podtrženy):

$$1 \quad \underline{3} \quad 3 \quad \underline{6} \quad 1$$

Podíl dvou prvních koeficientů bude $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3}$

Takže:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & \underline{3} & 3 & \underline{6} & 1 & \frac{1}{3} \\
 -1 & & -2 & & & \\
 \hline
 & 3 & \underline{1} & 6 & \underline{1} & \frac{3}{1} \\
 -3 & & -3 & & & \\
 \hline
 & & 1 & 3 & 1 &
 \end{array}$$

Závěr: Všechny koeficienty charakteristického polynomu i koeficienty redukovaných polynomů jsou kladné, proto je regulační obvod stabilní.

Routh-Schurovým kritériem vyšetřeme stabilitu regulačního obvodu, jehož charakteristická rovnice má tvar

$$s^6 + 2s^5 + 6s^4 + 8s^3 + 7s^2 + 8s + 1 = 0.$$

Řešení:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & \underline{2} & 6 & \underline{8} & 7 & \underline{8} & 1 & \frac{1}{2} \\
 -1 & & -4 & & -4 & & & \\
 \hline
 & 2 & \underline{2} & 8 & 3 & 8 & \underline{1} & \frac{2}{2} = 1 \\
 -2 & & -3 & & -1 & & & \\
 \hline
 & 2 & \underline{5} & 3 & 7 & 1 & & \frac{2}{5} \\
 -2 & & -14 & & & & & \\
 \hline
 & 5 & \underline{1} & 7 & \underline{1} & & & 25 \\
 -5 & & -5 & & -25 & & & \\
 \hline
 & & 1 & 18 & 1 & & &
 \end{array}$$

Závěr: V redukované rovnici 2. stupně je jeden z koeficientů záporný, proto je vyšetřovaný regulační obvod nestabilní.

Poznámka: Výhodou Routh-Schurova kritéria stability je, že se hodí i pro vyšetřování rovnic vyšších stupňů.

Hurwitzovo kritérium stability

Vychází opět z charakteristického polynomu (8.18) uzavřeného regulačního obvodu. Opět požadujeme splnění předpokladu, že $a_0, a_1, \dots, a_n > 0$. Z koeficientů charakteristického polynomu sestavíme tzv. Hurwitzovu matici

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Hurwitzova matice je stejného řádu jako je stupeň charakteristického polynomu. Z Hurwitzovy matice určíme Hurwitzův determinant, tj. $\det |H|$ a z něj sestavíme jeho subdeterminanty H_i , které jsou rovny hlavním minorům matice H . Platí tedy:

$$H_1 = a_{n-1}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \text{až } H_n = \det |H| = a_0 H_{n-1}.$$

O stabilitě regulačního obvodu můžeme rozhodnout takto:

Regulační obvod je stabilní, když

subdeterminant $H_{n-1} > 0$ a

další subdeterminanty musí být rovněž kladné, tj.

$$H_{n-2} > 0$$

.....

$$H_2 > 0.$$

Pokud některý z Hurwitzových subdeterminantů je rovný nule, potom regulační obvod je na mezi stability.

V případě $a_0 = 0$ je jeden kořen v počátku souřadnic komplexní roviny „s“ ($s_1 = 0$). Jde o tzv. nekmitavou (aperiodickou) mez stability. Když $H_{n-1} = 0$, pak dva kořeny jsou ryze imaginární (leží na imaginární ose souměrně podle počátku souřadnic v komplexní rovině „s“). V tomto případě jde o kmitavou (periodickou) mez stability.

Příklad: Vyšetřeme stabilitu regulačního obvodu, jehož charakteristický polynom má tvar:

$$f(s) = 1s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 2; \quad a_4 \div a_0 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot 5 = 60 - 18 - 25 = 17 > 0$$

Závěr: obvod je stabilní.

Příklad: Máme zadán regulační obvod přenosem integrační soustavy

$$G_S(s) = \frac{k_S}{s(1+sT_1)(1+sT_2)},$$

kde $k_S = 0,5$; $T_1 = 0,5$ s; $T_2 = 0,1$ s a přenosem proporcionálního regulátoru

$$G_R(s) = r,$$

kde $r = 24$.

Vyšetřeme stabilitu pomocí Hurwitzova kritéria stability.

Řešení: Charakteristickou rovnicí uzavřeného regulačního obvodu získáme podle vztahu (8.4)

$$1 + G_0(s) = 1 + G_R(s) G_S(s) = 0$$

nebo ze jmenovatele přenosu řízení

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}$$

Tedy

$$1 + r_0 \frac{k_S}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = 0$$

a po úpravě

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + r_0 k_S = 0$$

nutnou podmínkou stability je, aby všechny koeficienty byly kladné, což je splněno a aby byl kladný i Hurwitzův subdeterminant $H_{n-1} \equiv H_2$:

$$\begin{vmatrix} T_1 + T_2 & r_0 k_S \\ T_1 T_2 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Po vyčíslení a dosazení numerických hodnot dostaneme:

$$(T_1 + T_2) - T_1 T_2 r_0 k_S = (0,5 + 0,1) - 0,5 \cdot 0,1 \cdot 24 \cdot 0,5 = 0$$

Obvod je na mezi stability. Znamená to, že pro změnu stavitelného parametru regulátoru (r_0 - zesílení) se bude regulační obvod chovat:

pro $r_0 > 24$ jako nestabilní,

pro $r_0 < 24$ jako stabilní.

Příklad: U spojitého lineárního dynamického systému popsaného diferenciální rovnicí

$$2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + u(t)$$

určíme podmínky pro koeficienty a_0 a a_1 , které zajistí jeho stabilitu.

Řešení: Přenos má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 1}{2s^3 + 4s^2 + a_1 s + a_0}$$

Charakteristický polynom je dán jmenovatelem přenosu, tj.

$$f(s) = 2s^3 + 4s^2 + a_1 s + a_0.$$

Aby byly naplněny podmínky Hurwitzova kritéria musí platit:

a) $a_0 > 0$, $a_1 > 0$

b) $H_{n-1} \equiv H_2 > 0$

$$H_{n-1} = \begin{vmatrix} 4 & a_0 \\ 2 & a_1 \end{vmatrix} = 4a_1 - 2a_0 > 0,$$

tj. $a_1 > 1/2 a_0$.

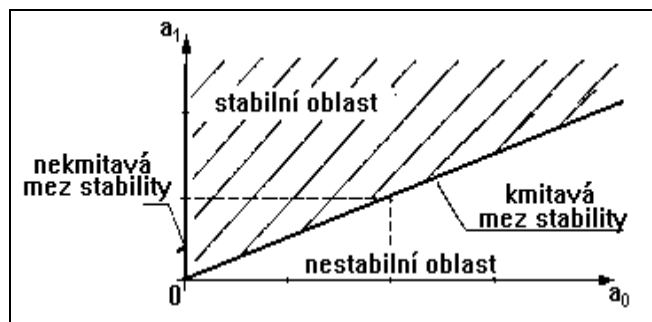
Stabilní oblast je vyznačena podmínkami

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_1 > 1/2 a_0$$

a je na obr. 8.5 vyšrafována. Pro mez stability platí rovnosti:

$a_0 = 0$ nekmitavá mez stability,

$a_1 = 1/2 a_0$ kmitavá mez stability.



Obr. 8.5 Meze stability

Nyquistovo kritérium

Toto kritérium je založeno na znalosti průběhu frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu. Může být použito i pro regulační obvody s dopravním zpožděním, kde nelze použít algebraická kritéria.

Nyquistovo kritérium: Regulační obvod je stabilní, jestliže kritický bod $[-1,0]$ leží vlevo od frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$ pro frekvence $\omega=0$ až ∞ .

Prochází-li frekvenční charakteristika $G_0(j\omega)$ bodem $[-1,0]$ je obvod na mezi stability.

Příklad: Vyšetřeme stabilitu regulačního obvodu s dopravním zpožděním $T_D = 0; 0,61; 1,0$

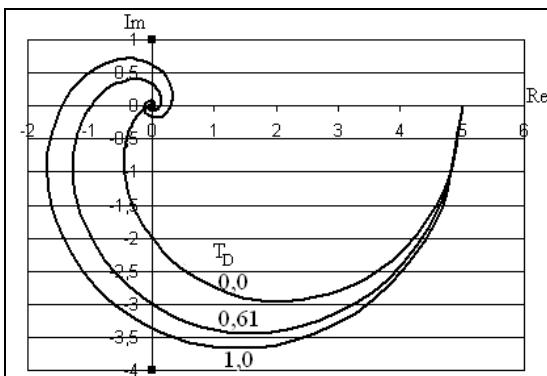
s přenosem rozpojeného obvodu $G_0 = \frac{5}{(0,5j\omega + 1)(2j\omega + 1)} e^{-T_D s}$. Dosadíme-li Eulerův vztah

$e^{-T_D s} = \cos T_D \omega - j \sin T_D \omega$ a rozložíme frekvenční přenos na reálnou a imaginární složku, obdržíme

$$G_0 = \frac{5(\cos T_D \omega - j \sin T_D \omega)(1 - \omega^2 - 2,5j\omega)}{(1 - \omega^2 + 2,5j\omega)(1 - \omega^2 - 2,5j\omega)} =$$

$$5 \frac{(1 - \omega^2) \cos T_D \omega - 2,5\omega \sin T_D \omega}{(1 - \omega^2)^2 + 2,5^2 \omega^2} - j 5 \frac{2,5\omega \cos T_D \omega + (1 - \omega^2) \sin T_D \omega}{(1 - \omega^2)^2 + 2,5^2 \omega^2}$$

Frekvenční charakteristiku sestrojíme pro zvolená T_D a z následujícího grafu je zřejmé, že pro $T_D=0,61$ je obvod na mezi stability a pro $T_D > 0,61$ je obvod nastabilní.



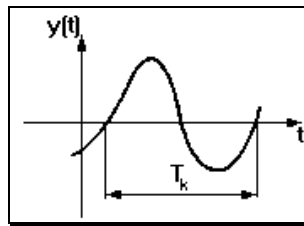
9. Seřízení regulátoru

9.1 Metoda kritického zesílení regulátoru (metoda Ziegler-Nicholsova)

Původně se jednalo o čistě empirickou metodu pro nastavení stavitelných parametrů regulátoru, který je připojen k vlastní skutečné regulované soustavě. Základní myšlenkou metody je přivést regulační obvod do tzv. kritického stavu, tj. na hranici stability, přičemž regulátor pracuje pouze s proporcionální složkou a tedy integrační a derivační složka jsou vyřazeny nastavením

$$T_I = \infty \text{ a } T_D = 0, \text{ resp. } r_{-1} = 0 \text{ a } r_1 = 0.$$

Do kritického stavu obvod přivedeme postupným zvyšováním zesílení regulátoru k_R , resp. r_0 , až obvod začne kmitat s konstantní amplitudou. Zesílení regulátoru, při kterém k tomu došlo, nazýváme kritickým zesílením $k_R = k_{Rk}$, resp. $r_0 = r_{0k}$ a periodu kritických kmitů $T = T_k$. Tyto tzv. kritické hodnoty dosadíme do empirických vztahů pro použitý typ regulátoru a vypočítáme doporučené seřízení (viz tab. 1). Uvedené doporučené hodnoty pro seřízení stavitelných parametrů regulátorů byly odvozeny i výpočtem.



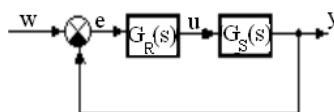
Obr. 9.1 Určení T_k při r_{0k}

Tab. 1: Seřízení PID regulátoru z kritických hodnot regulátoru

	k_R	T_I	T_D	r_0	r_{-1}	r_1
P	$0,5 k_{Rk}$	-	-	$0,5 r_{0k}$	-	-
PI	$0,45 k_{Rk}$	$\frac{T_k}{1,2}$	-	$0,45 r_{0k}$	$\frac{0,54 r_{0k}}{T_k}$	-
PD	$0,4 k_{Rk}$	-	$0,05 T_k$	$0,4 r_{0k}$	-	$0,02 r_{0k} T_k$
PI D	$0,6 k_{Rk}$	$0,5 T_k$	$0,12 T_k$	$0,6 r_{0k}$	$1,2 \frac{r_{0k}}{T_k}$	$0,075 r_{0k} T_k$
I ⁺)	-	$2 T_{Ik}$	-	-	$0,5 r_{-1k}$	-

^{+) V případě čistě integračního regulátoru přivedeme regulační obvod do kritického stavu $T_I \rightarrow T_{Ik}$, resp. $r_{-1} \rightarrow r_{-1k}$.}

Příklad: Pokud známe matematický model regulované soustavy můžeme seřízení regulátoru vypočítat teoreticky. Metodou kritického zesílení navrhne optimální seřízení ideálního PI-regulátoru, který je zapojen v regulačním obvodu podle obr. 9.2.



Obr. 9.2

Regulovaná soustava je dána přenosem $G_S(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$, regulátor $G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$.

Řešení: Regulátoru ponecháme pouze proporcionální složku, zbývající (v našem případě integrační) vyřadíme, tj. $r_{-1} = 0$. Pro regulátor použijeme přenosu $G_R(s) = r_0$.

Charakteristickou rovnicí regulačního obvodu získáme z jmenovatele přenosu odchylky při řízení

$$G_{ew}(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{1}{1 + \frac{6r_0}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}} = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1 + r_0)}$$

a tedy

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1 + r_0) = 0.$$

Pro určení kritického zesílení regulátoru r_{0k} použijeme Hurwitzova kritéria

$$H_3 = \begin{vmatrix} 6 & 6(1+r_0) & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6(1+r_0) \end{vmatrix}$$

$$H_2 = 6 \cdot 11 - 6(1+r_0) = 6(10-r_0).$$

Pro hranici stability musí být splněna podmínka

$$H_2 \stackrel{!}{=} 0, \text{ tj. } r_0 = r_{ok} = 10.$$

Pro r_{ok} obvod kmitá s periodou $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$.

Pro její výpočet potřebujeme určit úhlovou rychlost ω_k . Je zřejmé, že pro periodický děj na hranici stability existuje nutně dvojice ryze imaginárních sdružených kořenů $s_{1,2} = \pm j\omega_k$ charakteristické rovnice. Kritickou úhlovou rychlost ω_k určíme dosazením $r_0 = r_{ok}$ a $s = j\omega_k$ (jednoho ryze imaginárního kořene) do charakteristické rovnice

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1+r_0) = \left. \begin{matrix} r_0 = r_{ok} \\ s = j\omega_k \end{matrix} \right| =$$

$$= (j\omega_k)^3 + 6(j\omega_k)^2 + 11j\omega_k + 66 = 0$$

a dále z podmínky, že reálná i imaginární část rovnice jsou rovny nule

$$(66 - 6\omega_k^2) + j\omega_k(11 - \omega_k^2) = 0$$

$$66 - 6\omega_k^2 = 0 \quad ; \quad \omega_{k1,2} = \pm\sqrt{11}$$

$$\omega_k(11 - \omega_k^2) = 0 \quad ; \quad \omega_{k1,2} = \pm\sqrt{11} \quad , \quad \omega_{k3} = 0.$$

Fyzikální význam má řešení $\omega_k = \sqrt{11} = 3,317 \text{ s}^{-1}$.

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} = 1,894 \text{ s}.$$

Stavitelné parametry PI regulátoru tedy budou:

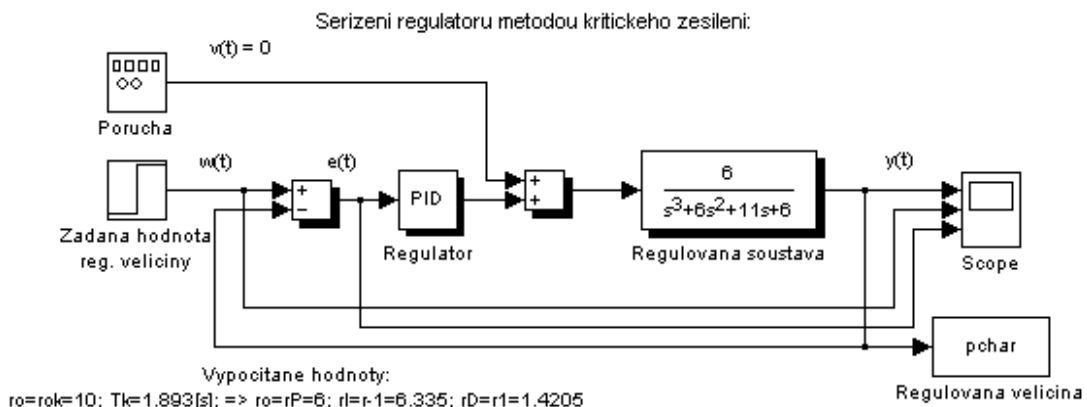
$$k_R = 0,45 \quad k_{Rk} = 0,45 \cdot 10 = 4,5$$

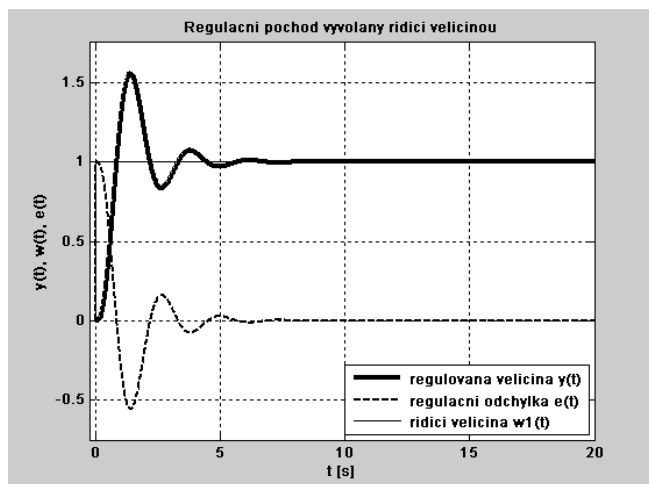
$$T_I = \frac{T_k}{1,2} = \frac{1,894}{1,2} = 1,578 \text{ s}$$

$$r_0 = k_R$$

$$r_{-1} = \frac{0,54r_{ok}}{T_k} = \frac{0,54 \cdot 10\sqrt{11}}{2\pi} = 2,85 \text{ s}^{-1}.$$

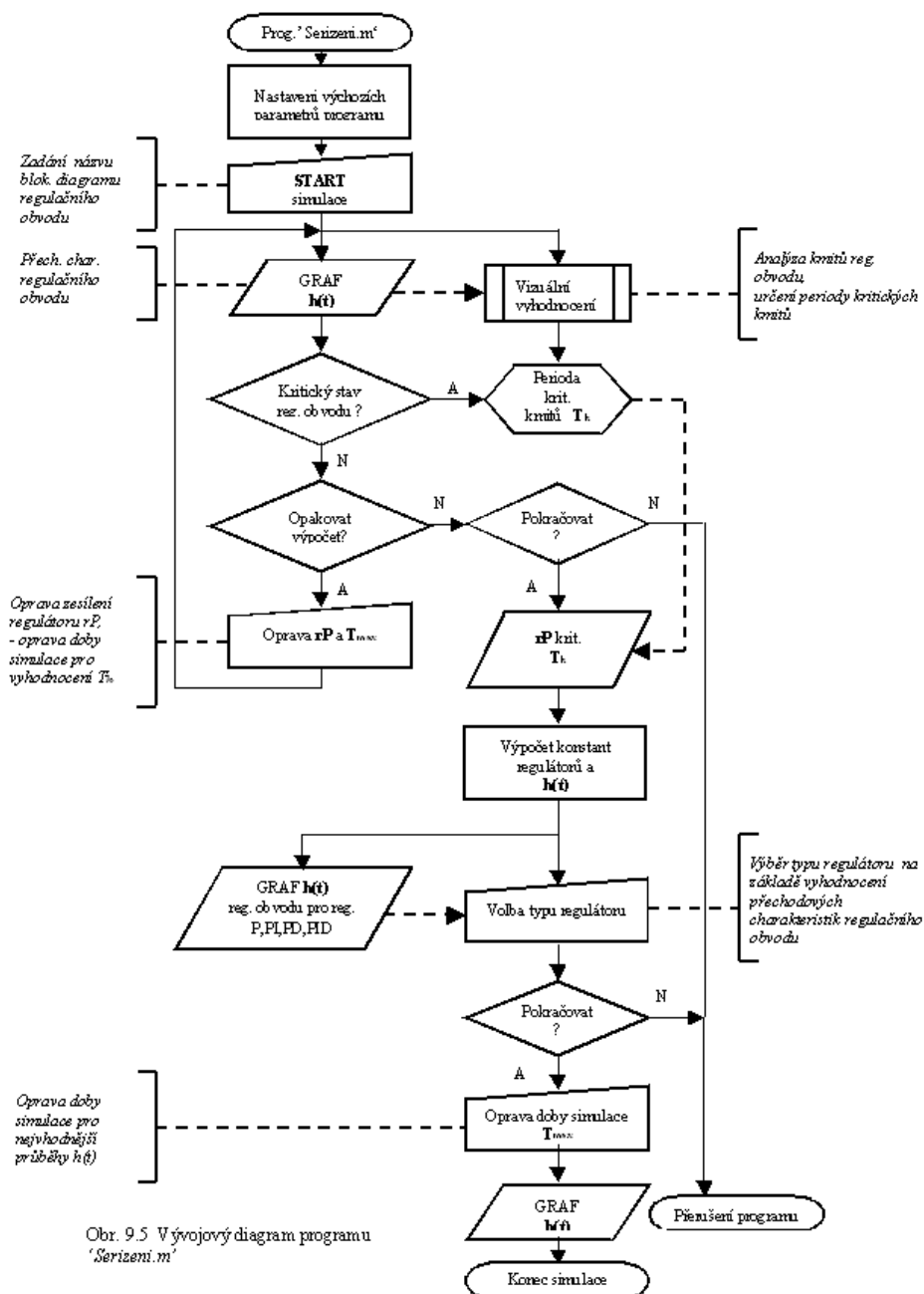
9.2 Seřízení regulátoru PID metodou kritického zesílení.



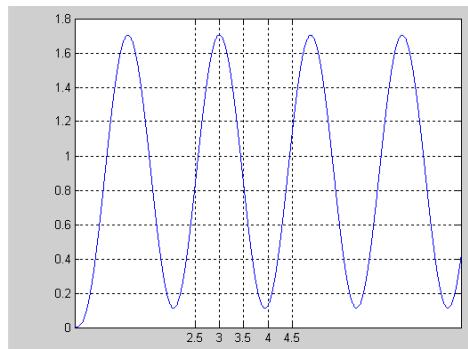


Obr. 9.4 Časové průběhy regulované veličiny $y(t)$, žádané hodnoty regulované veličiny $w(t)$ a regulační odchylky $e(t)$

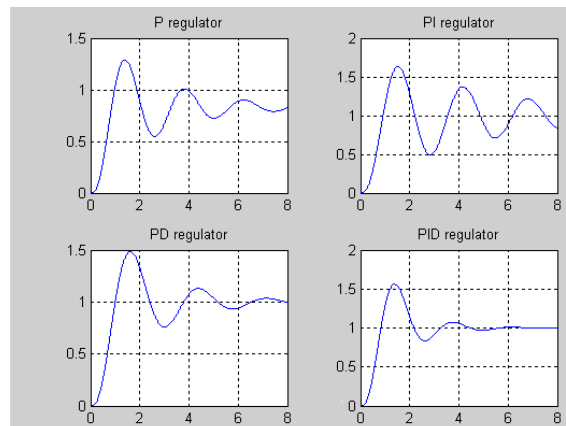
Je dán matematický model regulované soustavy. V programu Simulink je navržen blokový diagram modelu regulačního obvodu 'krit_zesileni.mdl' (viz. obr. 9.3.) . V jazyku Matlab je naprogramována metoda kritického zesílení pro seřízení různých typů regulátorů 'Serizeni.m', Vývojový diagram programu je uveden na obr. 9.5. Časové průběhy regulované veličiny $y(t)$, žádané hodnoty regulované veličiny $w(t)$ a regulační odchylky $e(t)$ jsou na obr. 9.5. Další obrázky představují výsledky simulace seřízení regulátorů metodou kritického zesílení. Obr. 9.6 představuje kmity obvodu pro stanovení periody kritických kmitů T_k , obr.9.7 přechodové charakteristiky obvodu při využití jednotlivých typů regulátorů a pro volbu nevhodnějšího typu regulátů



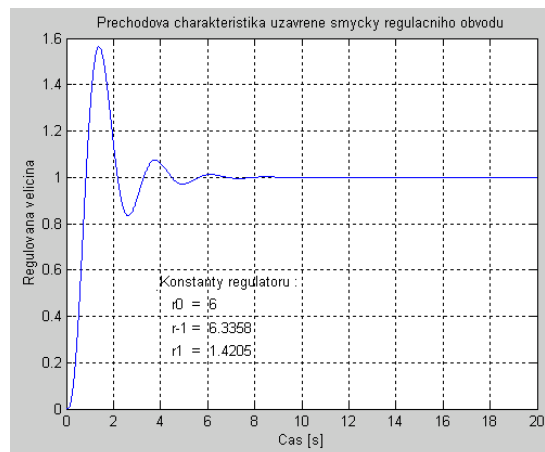
Obr. 9.5 Vývojový diagram programu 'Serizeni.m'



Obr. 9.6 Kritické kmity regulačního obvodu pro stanovení periody T_k .



Obr. 9.7 Přejchodové charakteristiky regulačního obvodu s regulátory P, PI, PD, PID.



Obr. 9.8 Přejchodová charakteristika uzavřené smyčky regulačního obvodu s PID regulátorem.

```
% Program : Serizeni.m
% Simuluje serizeni P, PI, PD a PID regulatoru
% metodu kritickeho zesileni
% Metoda Ziegler-Nicholsova
%
% Nastaveni pocatecnich parametru.
%
clear all; close all; echo off; format long;
global rP rI rD Tmax kr pom01 pom02 pom03;
rP=5;rI=0;rD=0;Tmax=0.1;kr=0.001;
opak='A';
krok=0;
model="";
clc
disp(' SERIZENI REGULATORU METODOU
KRITICKEHO ZESILENI')
disp(' -----')
```



```

disp("")
while isempty(model)
    model=input("Zadej nazev blok.diagramu ','s');
    clc
end

while upper(opak)=='A'
    krok=krok+1;
    clc
%
% Simulace podle zadanych hodnot
%
    sim(model,Tmax)
%
% Zadavani konstant z obrazovky.
%
    disp(' SERIZENI REGULATORU METODOU
KRITICKEHO ZESILENI')
    disp(' -----')
    disp("")
    disp(['Blokovy diagram :',model,
'Krok : ',num2str(krok,6)])
    disp(' ')
    disp([' Proporcionalni konstanta regulatoru rP = ',
num2str(rP,4)])
    disp([' Integracni konstanta regulatoru   rI = ',
num2str(rI,4)])
    disp([' Derivacni konstanta regulatoru   rD = ',
num2str(rD,4)])
    disp([' Doba simulace                Tmax = ',
num2str(Tmax,4)])
    disp(' ')
    kr=Tmax/(length(pchar)-1);
    t=0:kr:Tmax;
    plot(t,pchar),grid
    disp(' ')
%
% Dialog : obrazovka - model. Parametr s=jeden znak.
%
    opak=input('OPAKOVAT VYPOCET [A/N]?', 's');
    if isempty(opak)
        opak='N'
    end
    if upper(opak)=='A'
        disp(' ')
        disp(' Zadej nove hodnoty nebo ENTER')
        disp(' ')
        pom01=input('   rP = ');
        if or (rP>pom01, rP<pom01);
            rP=pom01;
        end
        pom02=input('   Tmax = ');
        if or (Tmax>pom02, Tmax<pom02);
            Tmax=pom02;
        end
    end
end
disp(' ')
opak=input('POKRACOVAT [A/N]?', 's');
if or(upper(opak)>'A',upper(opak)<'A')

```

```

disp('****ROGRAM BYL PRERUSEN ****')
return
end
%
% Zobrazeni charakteristiky pro ruzne typy regulatoru
%
clc
rPk=rP;
disp([' Kriticke zesileni : ',num2str(rPk,6)])
Tk=input(' Zadej periodu krit.kmitu Tk ');
disp(' ')
%
% P regulator.
%
rP=0.5*rPk;
sim(model)
kr1=Tmax/(length(pchar)-1);
t=0:kr1:Tmax;
subplot(2,2,1); plot(t,pchar(:,1)),grid
title ('P regulator')
%
% PI regulator.
%
rP=0.45*rPk;
rI=0.54*rPk/Tk;
sim(model)
kr1=Tmax/(length(pchar)-1);
t=0:kr1:Tmax;
subplot(2,2,2); plot(t,pchar(:,1)),grid
title ('PI regulator')
%
% PD regulator.
%
rP=0.4*rPk;
rD=0.02*rPk*Tk;
sim(model)
kr1=Tmax/(length(pchar)-1);
t=0:kr1:Tmax;
subplot(2,2,3); plot(t,pchar(:,1)),grid
title ('PD regulator')
%
% PID regulator.
%
rP=0.6*rPk;
rI=1.2*rPk/Tk;
rD=0.075*rPk*Tk;
sim(model)
kr1=Tmax/(length(pchar)-1);
t=0:kr1:Tmax;
subplot(2,2,4); plot(t,pchar(:,1)),grid
title ('PID regulator')
%
% Vyber regulatoru podle zobrazenych charakteristik
%
typreg=input(' Vyber typ regulatoru : P, PI, PD, PID : ',
's');
switch upper(typreg)
case 'P'
rP=0.5*rPk;
rI=0

```

```

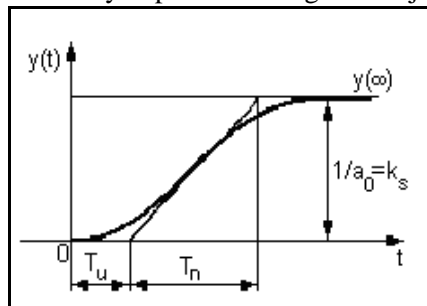
    rD=0
case 'PI'
    rP=0.45*rPk;
    rI=0.54*rPk/Tk;
    rD=0
case 'PD'
    rP=0.4*rPk;
    rD=0.02*rPk*Tk;
    rI=0
case 'PID'
    rP=0.6*rPk;
    rI=1.2*rPk/Tk;
    rD=0.075*rPk*Tk;
end
clc
disp('NASTAVENE KONSTANTY REGULATORU : ')
disp('-----')
disp(' ')
disp(['Typ regulatoru : ',upper(typreg)])
disp('-----')
disp(['Proporcionalni konstanta rP : ',num2str(rP,6)])
switch upper(typreg)
case 'PI'
    disp(['Integracni konstanta rI : ',num2str(rI,6)])
case 'PD'
    disp(['Derivacni konstanta rD : ',num2str(rD,6)])
case 'PID'
    disp(['Integracni konstanta rI : ',num2str(rI,6)])
    disp(['Derivacni konstanta rD : ',num2str(rD,6)])
end
disp(' ')
disp(' ')
opak=input('POKRACOVAT [A/N]?','s');
if or(upper(opak)>'A',upper(opak)<'A')
    disp('***** PROGRAM BYL PRERUSEN ****')
    return
end
%
%Prechodova charakteristika uzavrene smycky
%pro vybrany regulator
Tmax=input('Zadej cas simulace Tmax :');
sim(model,Tmax)
kr1=Tmax/(length(pchar)-1);
t=0:kr1:Tmax;subplot(1,1,1);
plot(t,pchar(:,1)),grid
title('Prechodova charakteristika uzavrene
smycky regulacniho obvodu')
text(4,0.55,['Konstanty regulatoru :'])
text(4.5,0.45,['r0 = ',num2str(rP)])
text(4.5,0.35,['r-1 = ',num2str(rI)])
text(4.5,0.25,['r1 = ',num2str(rD)])
xlabel('Cas [s]'),ylabel('Regulovana velicina')
return

```

9.3 *Seřizení regulátoru na základě znalosti přechodové charakteristiky regulované soustavy*

Je možné přímo volit jednoduché relace mezi přechodovou charakteristikou regulované soustavy a stavitelnými parametry regulátoru takové, aby regulační pochod byl blízký optimálnímu. Z odměřené

přechodové charakteristiky (obr. 9.9) regulované soustavy zjistíme dobu průtahu T_u , dobu náběhu T_n a činitel autoregulace a_0 . Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru jsou uvedeny v tabulce 2.



Obr. 9.9 Přechodové charakteristiky regulované soustavy

Tab. 2: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru

Typ	r_0	T_I	T_D
P	$\frac{T_n}{T_u} a_0$	-	-
PI	$0,9 \frac{T_n}{T_u} a_0$	$3,5 T_u$	-
PD	$1,2 \frac{T_n}{T_u} a_0$	-	$0,25 T_u$
PID	$1,25 \frac{T_n}{T_u} a_0$	$2 T_u$	$0,5 T_u$

Příklad: Byla změřena přechodová charakteristika výměníku (obr. 9.10). Naměřené hodnoty jsou:

$$T_u = 1,5 \text{ min}, T_n = 4,5 \text{ min}$$

$$k_s = \frac{1}{a_0} = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{40}{10} = 4 \text{ } ^\circ\text{C/mm}$$

Seřídíme regulátor PI.

Řešení: Podle tab. 2 nastavíme proporcionální parametry regulátoru PI:

Zesílení bude

$$r_0 = 0,9 \frac{T_n}{T_u} a_0 = 0,9 \cdot \frac{4,5}{1,5} \cdot \frac{1}{40} = 0,675 \text{ mm}/^\circ\text{C},$$

což značí, že zesílení regulátoru musí zabezpečit, aby při odchylce $e(t) = 1^\circ\text{C}$ na vstupu regulátoru se přestavil regulační orgán o 0,675 mm. Integrovaná časová konstanta bude $T_I = 3,5 \cdot T_u = 3,5 \cdot 1,5 = 5,25$ min. Výpočet zesílení regulátoru lze provést i v bezrozměrných hodnotách. Potom je nutné definovat maximální zdvih regulačního orgánu, např. $u_{\max} = 40$ mm a za předpokladu lineární regulované soustavy můžeme nakreslit její statickou charakteristiku (obr. 9.10).

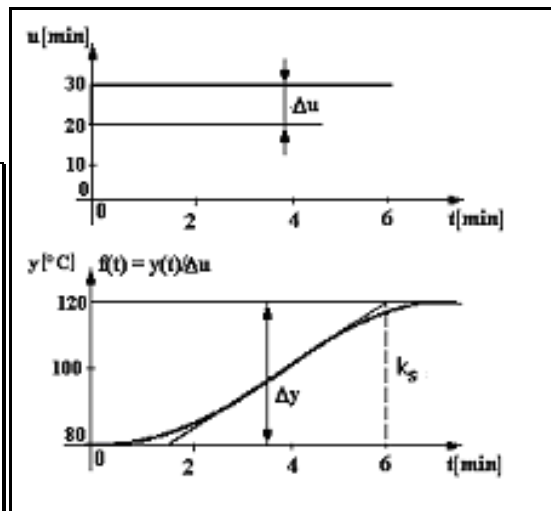
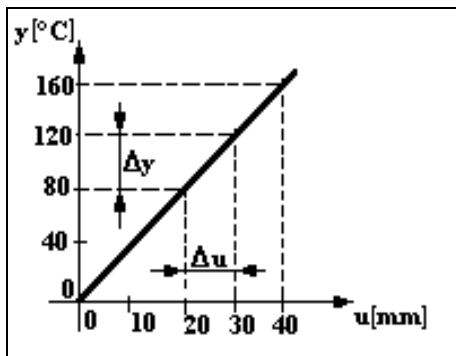
Potom podle

$$\Delta y \cdot a_0 = \Delta u$$

platí

$$y_{\max} = \frac{1}{10} u_{\max} = 4 \cdot 40 = 160 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Vypočítáme hodnotu $(\Delta y)_r$, tj. k jaké změně teploty při nastaveném zesílení $r_0 = 0,675 \text{ mm}/^\circ\text{C}$ musí dojít, aby se regulační orgán přestavil o maximální zdvih (o 100%).



Obr. 9.10 Proporcionální charakteristika výměníku Obr. 9.11 Přechodová charakteristika výměníku

$$1 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (\Delta y_r) \text{ } [^\circ\text{C}]$$

$$0,675 \text{ mm} \quad 40 \text{ [mm]}$$

$$(\Delta y)_r = \frac{40}{0,675} = 59,26 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Pásmo proporcionality bude

$$pp = \frac{59,26}{160} \cdot 100 = 37\%$$

a zesílení

$$r_0 = \frac{1}{37} \cdot 100 = 2,7 \text{ [-]}$$

9.4 *Kriterium jakosti regulace podle funkcionálu odchylky (integrační kritéria)*

Uvažujeme regulační pochod způsobený změnou žádané hodnoty regulované veličiny (změnou řídicí veličiny), tj. $v(t) = 0$, $w(t) = \eta(t)$, či určitou poruchou, tj. $w(t) = 0$, $v(t) = \eta(t)$, (obr. 9.12) a stanovme časový integrál J (rovnice 9.1 až 9.3) odchylek regulované veličiny od její nové ustálené hodnoty

$$e(t) = y(t) - y(\infty)$$

podle vztahů:

- pro lineární regulační plochu

$$|J| = \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)] dt \quad (9.1)$$

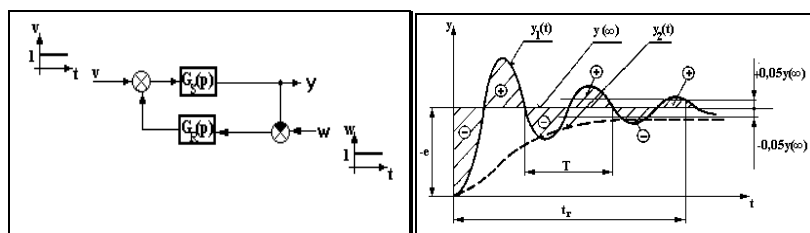
která se hodí pro aperiodický regulační pochod (obr. 9.10 - průběh $y_2(t)$).

Pro periodický regulační pochod (obr. 9.10 - $y_1(t)$) bychom museli použít při výpočtu lineární regulační plochy absolutní hodnoty $e(t)$, tj.

$$J = \int_0^{\infty} |y(t) - y(\infty)| dt \quad (9.2)$$

- nebo pro kvadratickou regulační plochu

$$J_k = \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)]^2 dt \quad (9.3)$$



Obr. 9.12 Regulační pochody periodické - $y_1(t)$ a aperiodické - $y_2(t)$, vyvolané změnou $w(t)$ nebo vznikem $v(t)$

Poznámka: Pro regulační pochody bez trvalé regulační odchylky bude ve vztazích (9.1),(9.2),(9.3) $y(\infty) = 0$. Cílem úspěšnosti seřizování regulátorů resp. volby struktury regulátoru nebo případně i struktury regulačního obvodu je, aby výše uvedené časové integrály - regulační plochy byly minimální ($J \rightarrow \min$). Tento požadavek lze objasnit skutečností, že při regulačním pochodu dochází k výměně energie. Při záporné regulační odchylce má regulovaná soustava nedostatek energie (plochy označené - (při přeregulování - kladné regulační odchylce, má regulovaná soustava přebytek energie a je třeba omezit příkon, aby spotřeba energie regulovanou soustavou byla větší a regulovaná veličina se přiblížila opět k hodnotě $y(\infty)$).

Ideální průběh přechodového děje by byla skoková změna z hodnoty $y(0)$ na hodnotu $y(\infty)$, v tom případě bude $J = 0$. Ve skutečnosti přechodový děj má tvar $y_1(t)$ resp. $y_2(t)$ (viz obr. 9.10) a aby výměna energie byla co nejmenší musí být regulační plocha minimální.

Pro výpočet časových integrálů J využijeme Laplaceova obrazu regulační odchylky

$$L\{y(t) - y(\infty)\} = E(s) = Y(s) - \frac{y(\infty)}{s},$$

kterou si vyjádříme pomocí přenosu řízení $G_w(s)$ při změně řídicí veličiny jako vstupního signálu nebo pomocí přenosu poruchy $G_v(s)$ při poruše.

Z přenosu řízení při jednotkovém skoku řídicí veličiny bude Laplaceův obraz výstupní veličiny

$$Y(s) = G_w(s)W(s) = G_w(s) \frac{1}{s}.$$

Pro výpočet $y(\infty)$ - tj. ustálenou hodnotu regulované veličiny, použijeme větu o koncové hodnotě.

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_w(s) \frac{1}{s} = G_w(0).$$

Laplaceův obraz regulační odchylky vyjádříme ve tvaru

$$E(s) = L\{y(t) - y(\infty)\} = \frac{1}{s} [G_w(s) - G_w(0)].$$

Z přenosu poruchy při jednotkovém skoku poruchy můžeme obdobně odvodit vztah pro $E(s)$

$$E(s) = L\{y(t) - y(\infty)\} = \frac{1}{s} [G_v(s) - G_v(0)].$$

10. Řídicí algoritmy PSD

Jsou to po formální stránce velmi jednoduché algoritmy. Jsou vlastně diskrétním přepisem analogových PID regulátorů. V prvním přiblížení pro výstupní akční veličiny číslicového regulátoru v okamžiku vzorkování k lze psát (jako horní meze součtu se používá též hodnoty $k-1$).

$$u(k) = P \cdot \left\{ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{j=-\infty}^k e(j) + \frac{T_D}{T} (e(k) - e(k-1)) \right\}$$

kde je

P koeficient odpovídající proporcionálnímu zesílení analogového PID regulátoru,
 T_I, T_D koeficienty odpovídající časové konstantě integrační resp. derivační analogového regulátoru,
 e regulační odchylka $e = w - y$.

Podobně lze psát pro předcházející okamžik vzorkování

$$u(k-1) = P \cdot \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_I} \sum_{j=-\infty}^{k-1} e(j) + \frac{T_D}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\}$$

Po odečtení obou rovnic dostáváme řídicí algoritmus počítače v přírůstkovém tvaru

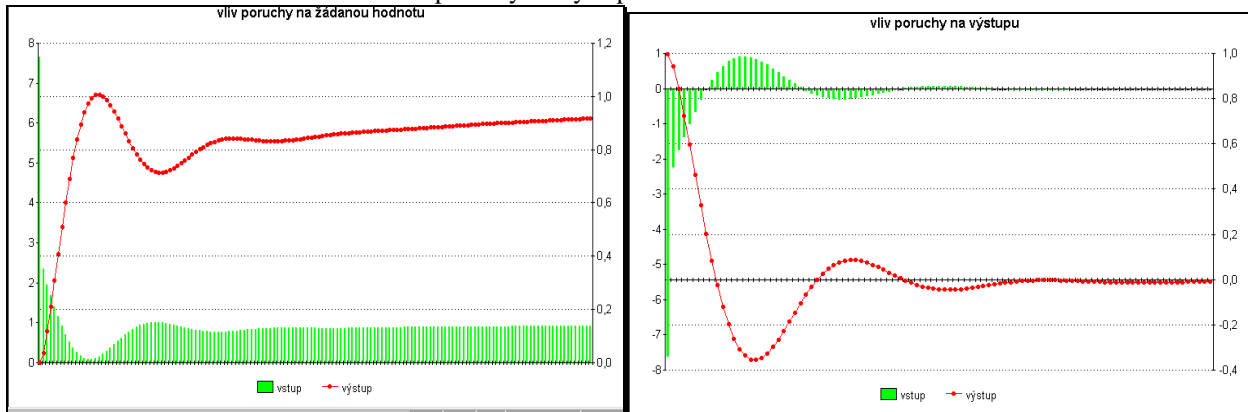
$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) =$$

$$= P \cdot \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k) + \frac{T_D}{T} \{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)\} \right\}$$

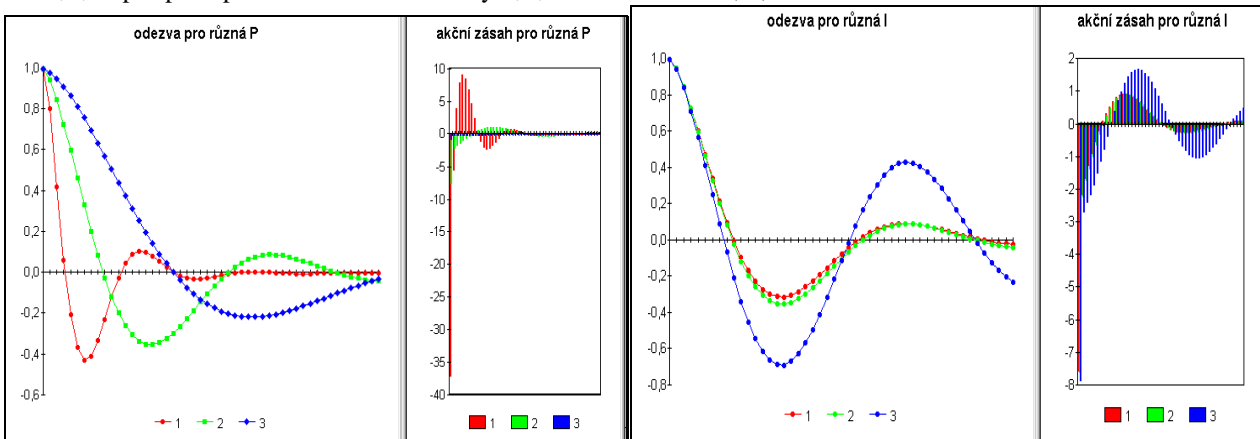
$$u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$$

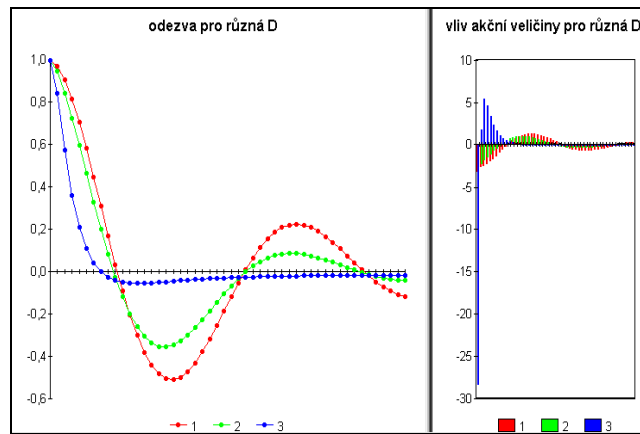
Příklad: Uvažujme PSD regulátor pro $P=2.6$, $I=9.2$ a $D=0.2$ pro soustavu druhého řádu s koeficienty $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=1$ a $b_0=1$.

Vliv poruchy na výstupu a na žádané hodnotě:



Vliv P , I , D pro postupně měnící se koeficienty P , I , D násobením 0.1, 1, 10:





{ regulace PSD rgulátorem odezva soustavy na skok resenim dif. rovnice n-radu metodou snizovani radu derivace }

```

uses crt;
var
  ud,yd:string;
  y,a:array[0..10]of real;
  b:array[0..0]of real;
  ypom,x,y0p,h,u,up,du,tkrok,p,ti,td,e0,e1,e2,w,hr:real;
  kontisk,ttisk,tisk,i,ip,ipp,nrad,pomh:integer;
  var s: Text;
begin
  clrscr;
  Assign(s, 'c:\zrus1a.dat');
  Rewrite(s);
  e1:=0;e2:=0;
  writeln(0.0:4:1,0.0:10:3,0.0:10:3);
  writeln('zadej rad soustavy');read(nrad);
  writeln('zadej y(0),y''(0),...');
  for i:=0 to nrad-1 do
    read(y[i]);
  writeln('zadej koeficienty a0*y+a1*y''+a2*y''+....=b0*u');
  for i:=0 to nrad do
    read(a[i]);
  read(b[0]);
  writeln('zadej krok vypoctu regulatoru napr. 0.1');
  read(tkrok);
  writeln('zadej krok tisku');
  writeln('napr.1 kazdy vypocteny v tkrok,10 kazdy desaty krok,..');
  read(tisk);
  writeln('zadej posledni bod tisku');
  read(kontisk);
  y0p:=1; {PORUCHA NA VYSTUPU}
  up:=0; {PORUCHA NA VSTUPU}
  for i:=0 to nrad do y[i]:=0;y[0]:=y0p;
  u:=up;
  h:=0.001;{h integracni krok }
  { vypocet v bode nula }
  x:=0;

```

```

{ vypocet v dalsich krocich }
while x<kontisk do
begin
  pomh:=round(1/h*tkrok);
  for ipp:=1 to pomh do
    begin
      ypom:=b[0]/a[nrad]*u;
      for i:=0 to nrad-1 do
        ypom:=ypom-y[i]*a[i]/a[nrad];
      y[nrad]:=ypom;

```



```

for i:=nrad-1 downto 0 do
y[i]:=y[i]+y[i+1]*h;
x:=x+h;
end;
{ writeln(x:10:2,y[0]:10:3,y[1]);}
p:=2.58;ti:=9.25;td:=0.195;{konstanty regulatoru}
w:=0;{RIDICI VELICINA}
e0:=w-y[0]; hr:=tkrok;
du:=p*((e0-e1) + (hr/ti*e0) + (td/hr*(e0- 2*e1+e2)));
u:=u+du;
e2:=e1;e1:=e0;
if ttisk >=tisk then
begin
writeln(x:4:1,u:10:3,y[0]:10:3);
ttisk:=1;
end; ttisk:=ttisk+1;
{fitr}
str(u:15:6,ud);
delete(ud,9,1);
insert(',ud,9);
str(y[0]:15:6,yd);
delete(yd,9,1);
insert(',yd,9);
writeln(s,ud,#9,yd);
ip:=ip+1;
end;
Close(s);
readln;
end.

```

11. Simulink

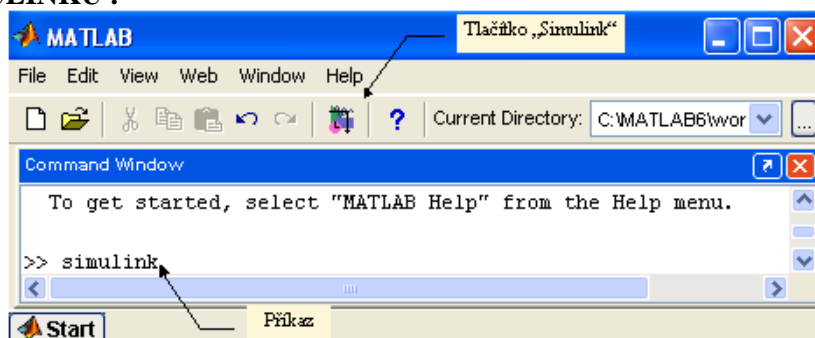
SIMULINK je program pro simulaci a modelování dynamických systémů. Poskytuje uživateli možnost rychle a snadno vytvářet modely dynamických soustav ve formě blokových schémat a rovnic. Pomocí SIMULINKu a jeho grafického editoru lze vytvářet modely lineárních, nelineárních, v čase diskretních nebo spojitych systémů pouhým přesouváním funkčních bloků myší.

Práce se SIMULINKem probíhá ve dvou fázích :

- definování modelu,
- analýza modelu,

obě fáze se interakčně opakují, dokud modelovaný děj neprobíhá podle zadaných požadavků. Je definován nový druh grafických oken, tzv. **blokových diagramů**, ve kterých jsou modely vytvářeny a editovány. Program dovoluje vytvářet i velmi složité systémy. Výsledky simulace je možné zobrazovat s využitím grafických možností SIMULINKu průběžně v době simulace nebo po skončení simulace. Pro kvalitní a rychlé vytvoření modelu je nutná znalost všech typů bloků, které jsou použitelné pro práci s určitou třídou systémů a ovládat manipulaci s bloky. Po skončení tvorby zvoleného modelu je možné vyvolat analýzu přímo z menu modelu nebo příkazy v pracovním prostoru MATLABu.

Knihovny v SIMULINKU :

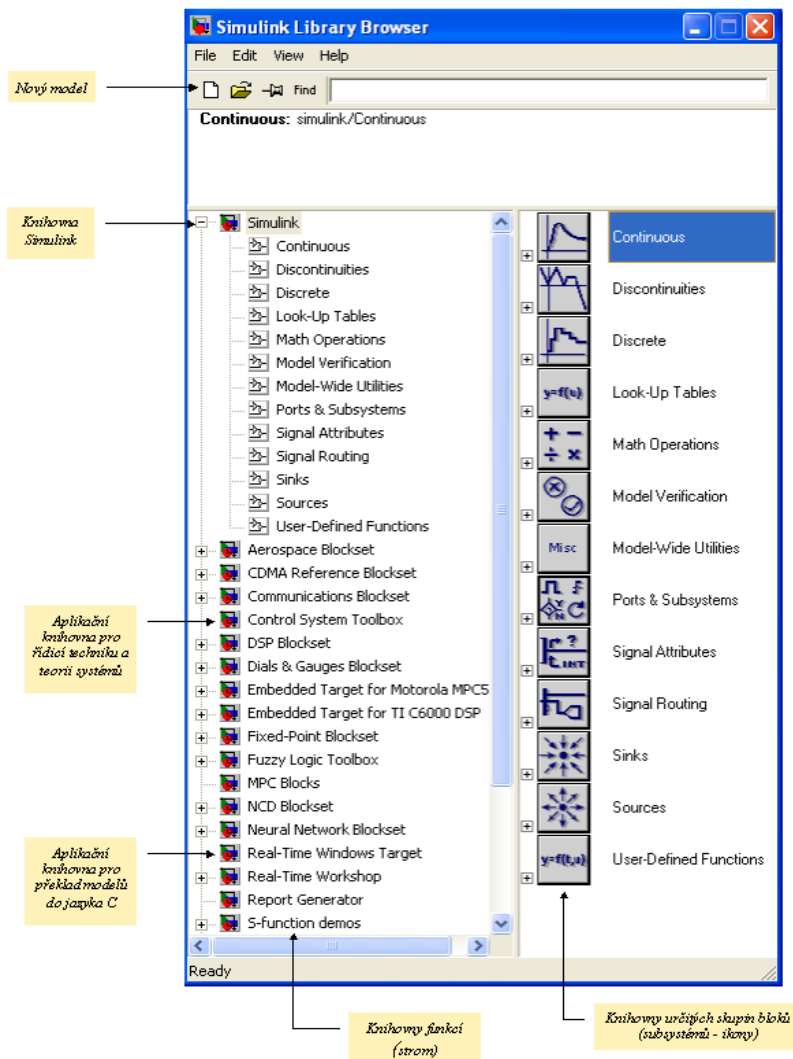


Seznam knihoven SIMULINKu a přístup k nim získáme po:

- zadání příkazu „*simulink*“ v příkazovém řádku Matlabu,
- a nebo kliknutím na tlačítko Simulink

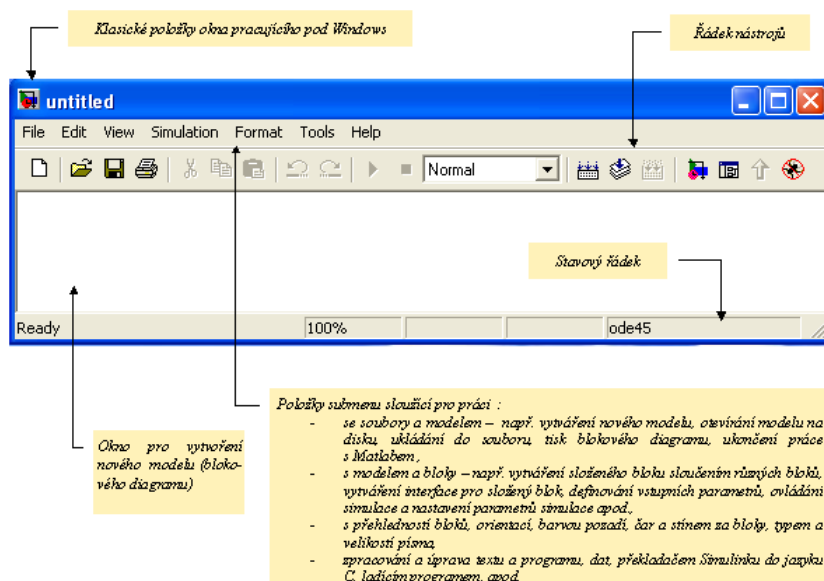
Každá knihovna obsahuje jednotlivé bloky, které lze myší přetáhnout do okna modelu. Většina bloků dovoluje editovat hodnoty parametrů, které je možno zadávat buď jako konstanty nebo jako proměnné. Pro přehledný zápis a zjednodušenou tvorbu složitého modelu lze vytvářet subsystemy a uživatelské knihovny. To umožňuje oddělit obecně použitelnou část programu od části specializované na řešení konkrétního problému.

V následujícím okně je uveden systém standardních knihoven pro SIMULINK ver. 5. Požadovanou knihovnu voláme levým tlačítkem myši na úrovni značky příslušného objektu.



Menu v SIMULINKU :

Libovolný model vytvořený v SIMULINKU má v záhlaví svého okna menu, které je stejné pro všechny modely a knihovny jednotlivých bloků.



Blokový diagram modelu se vytváří výběrem bloků z aplikačních knihoven a jejich přesunem do okna modelu myší. V okně modelu je možno bloky přesouvat, kopírovat, zadávat jejich parametry, měnit jejich názvy, propojovat odpovídající vstupy a výstupy bloků, psát komentáře apod. Sestavení modelu v prostředí SIMULINKU probíhá v několika krocích :

- definici úlohy, návrhu blokového diagramu a specifikaci potřebných knihoven a bloků

SIMULINKU,

- výběru bloků z knihoven a v jejich přesunu do okna modelu myší,
- propojení odpovídajících vstupů a výstupů bloků,
- zápis a umístění komentářů,
- nastavení základních parametrů simulace,

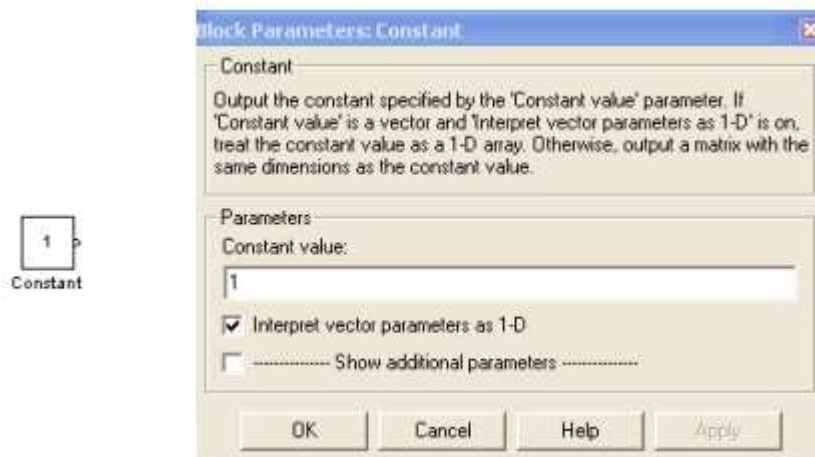
- spuštění simulace a případného otevření bloku pro vizualizaci.

V programu SIMULINK pracujeme nejčastěji s myší nebo používáme kombinaci práce s myší doplněnou příkazy zadávanými z klávesnice. Tvar kurzoru se mění podle činnosti, která se v daném okamžiku vykonává. Některé příklady různého tvaru kurzoru jsou uvedeny v následující tabulce :

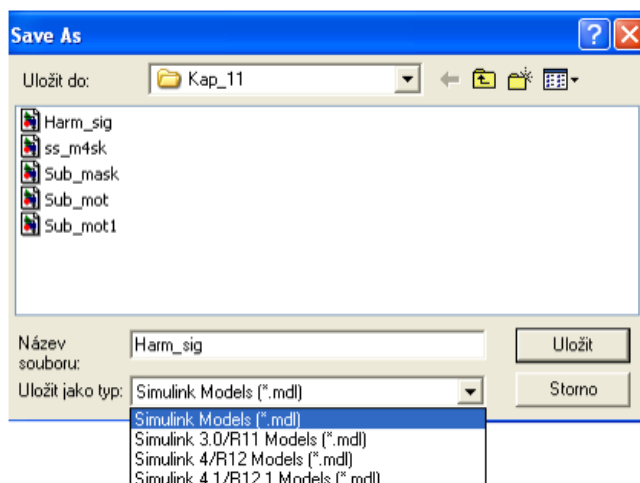
Činnost	Kurzor
Připraven k další činnosti	↑
Přenášení čáry	⬆
Přenášení zlomu čáry	○
Kreslení čar	+
Změna velikosti bloku	↔

Základní operace s bloky/skupinou bloků :

- Výběr objektů ,
 - pro práci s editovacími příkazy musí být vybrán jeden nebo více objektů. Objekt je vybrán, jestliže jeho rohy jsou označeny čtvercovými značkami,
- Přesouvání a kopírování bloků,
 - pomocí editovacích příkazů nebo tlačítek myši je možné přesunovat a kopírovat bloky/skupiny bloků,
- Mazání, změna orientace a editování názvu bloku, editovací příkazy rovněž umožňují operace jako je mazání bloku/skupiny bloků, změna orientace bloku a editace názvu bloku,
- Změna velikosti bloku,
 - velikost bloku se mění myší, protáhnutím některé ze značek, které vznikly při výběru bloku. Tvar kurzoru myši odpovídá příslušnému vrcholu značky bloku,
- Otevírání bloků,
 - otevření bloku docílíme dvojnásobným stisknutím levého tlačítka myši na úrovni zvoleného bloku. Většina bloků se otevírá do dialogového okna, ve kterém je možno editovat parametry bloku. Jako příklad je uveden blok **Constant** z knihovny **Sources** (zdrojových - vstupních signálů),



- Propojování objektů modelu :
 - pro spojení výstupu nějakého bloku se vstupem jiného bloku nebo čáry platí :
na jeden výstupní port může být připojený libovolný počet čar,
na jeden vstupní port může být připojena jen jedna čára,
čára nemůže spojit dva vstupní nebo dva výstupní porty,
čáru kreslíme od vstupu k výstupu nebo i opačně, orientace však bude vždy stejná,
čáry jsou kreslené pod úhlem, který je násobkem 45° ,
 - mazání čar, posouvání, segmentace a přidávání čar, umožňují editovací příkazy popř. tlačítka myši,
- Uložení modelu,
 - pro uložení modelu v definovaném formátu:
vybereme položku **Save As** v menu **File** (okno v němž je vytvořen blokový diagram modelu), doplníme **Název souboru**, vybereme formát pro uložení souboru z dialogového okna **Uložit jako typ**, kliknutím na tlačítko **Uložit** uložíme soubor do nastaveného adresáře.

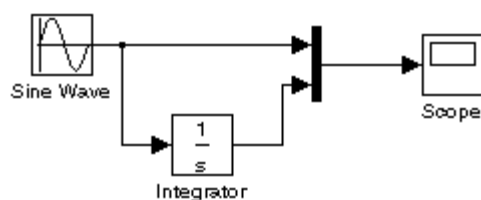


Příklad 1: Vytvořit model a graf průběhu harmonického sinusového signálu

$$a(t) = A \sin(\omega t + \psi)$$

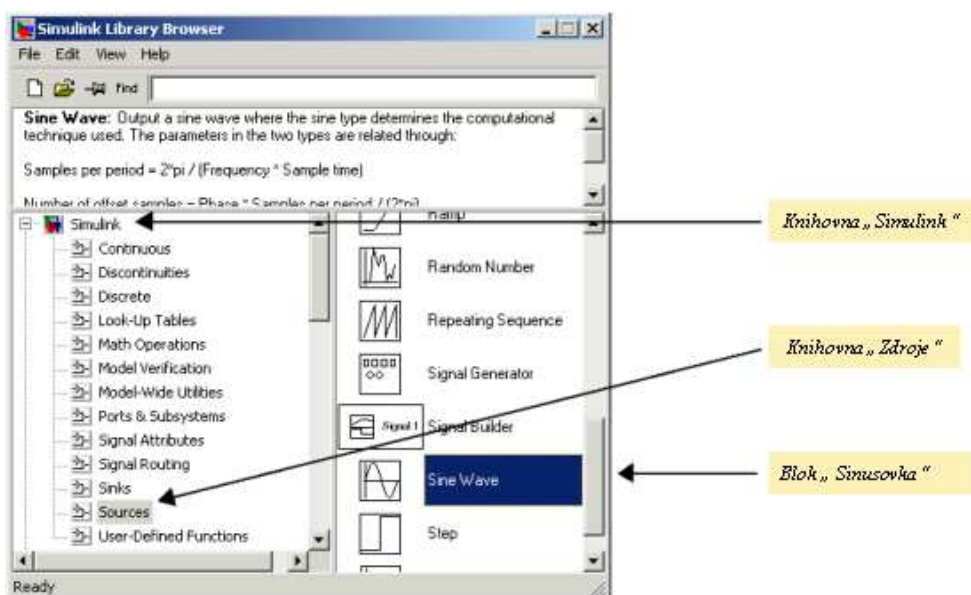
kde A je amplituda signálu, ω je úhlový kmitočet, který souvisí s dobou periody T vztahem $\omega = 2\pi/T$, ψ je úhel udávající počáteční fázi, a jeho integrálu $\int a(t)dt$

11.1 Návrh blokového diagramu

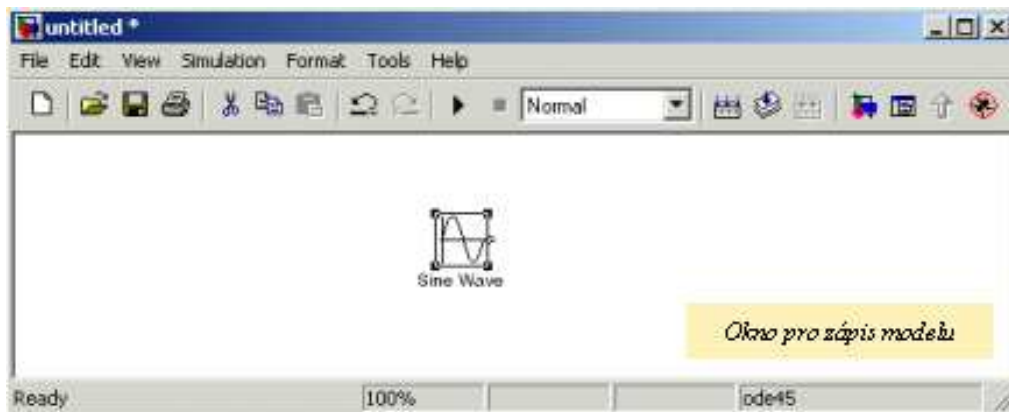


- Pro vytvoření modelu budeme potřebovat následující knihovny a bloky :
 - knihovna zdrojů (*Sources library*) – blok sinusového signálu (*Sine Wave*),
 - knihovna výstupů (*Sinks library*) – blok osciloskopu (*Scope*),
 - knihovna lineárních bloků (*Continuous library*) – integrační blok s počáteční podmínkou (*Integrator*),
 - knihovna pro směrování, slučování a rozdělování signálů (*Signal Routing library*) – blok pro spojení několika skalárních/vektorových signálů na jeden vektorový signál (*Mux*).

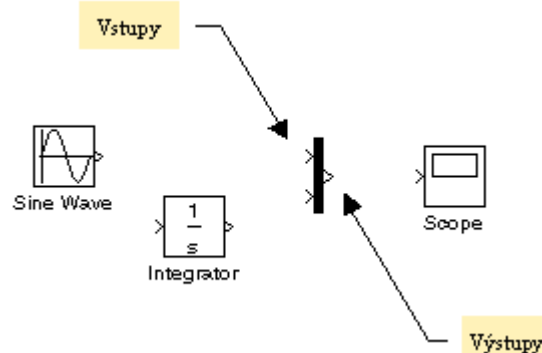
11.2 Výběr a kopírování požadovaných bloků z knihoven



- Přesun bloku (Sine Wave) z knihovny do okna modelu :

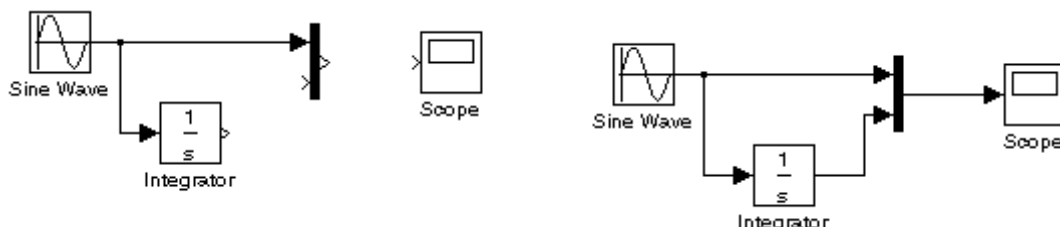


- stejným postupem kopírujeme definované bloky (Integrator, Mux a Scope) z ostatních knihoven.



Ve skutečnosti se nejedná o přesun bloku tak, jak je vžité pro použití ve Windows, neboť blok v knihovně nezmizí, vytváří se pouze vazba na knihovní blok. U některých typů bloku je možno definovat různý počet vstupů i výstupů, jako např. u bloků Mux a Scope apod.

11.3 Propojení vstupů a výstupů



- Komentáře,
 - komentář je možno umístit do libovolného místa modelu. Dvojklikem na požadovaném místě okna se dostaneme do režimu editace a můžeme zapsat požadovaný text,
- Nastavení základních parametrů simulace a parametrů bloků blokového diagramu,
 - a) Parametry simulace :
 - v hlavním menu okna modelu otevřeme nabídku **Simulation** vybereme položku **Simulation parameters ...** (nebo **Ctrl_E**) a objeví se okno parametrů simulace se záložkami **Solver, Workspace I/O, Diagnostic, Advanced a Real-Time Workshop**

Umožňuje nastavení základních parametrů simulace

Cas simulace – kladné reálné číslo
 - Start time – startovací čas simulace,
 - Stop time – čas konce simulace

Typ kroku a metody řešení

Simulation Parameters: untitled

Solver: Workspace I/O Diagnostics Advanced Real-Time Workshop

Simulation time
 Start time: 0.0 Stop time: 10.0

Solver options
 Type: Variable-step ode45 (Dormand-Prince)

Max step size: auto Relative tolerance: 1e-3
 Min step size: auto Absolute tolerance: auto
 Initial step size: auto

Output options
 Refine output Refine factor: 1

OK Cancel Help Apply

Max. krok integrace s ohledem na hladkost simulací získaných a následně vykreslených proměnných modelů

Přesnost řídí v každém kroku vývoj chyby integrační metody

Min. krok integrace s ohledem na analyzovaný model. Při nespojitostech a malých hodnotách vede k neúměrnému zatěžování paměti a CPU

- volby pod záložkou **Workspace I/O** se týkají možností napojení na pracovní prostor MATLABu. Je možné je předepsat, že se mají přebírat počáteční stavy, požadované okamžiky výpočtu a průběhy vstupních veličin z proměnných v pracovním prostoru MATLABu. Dále že vybrané vypočtené veličiny se mají ukládat do předepsaných proměnných MATLABu,
- **Diagnostics** umožňují nastavit zda události mají vyvolat hlášení a na jaké úrovni. Možné úrovně hlášení jsou **None (N)**, **Warning (W)** a **Error (E)**.
- b) Parametry bloků :
 - nastavujeme v dialogovém okně,
 - okno otevřeme dvojným stisknutím levého tlačítka myši na úrovni zvoleného bloku,

- Start simulace :
 - tlačítkem **Start simulace**,
 - menu **Simulation**, položka **Start**,
 - klávesy **Ctrl + T**,

□ Úprava výstupního grafu

Harm_sig

File Edit View Simulation Format Tools Help

Normal

11.1 Harmonický sinusový signál
 $a(t) = A \cdot \sin(\omega t + \Psi)$

Sine Wave Integrator Scope

Tlačítko Start simulací

A = amplituda
 $\omega = 2 \cdot \pi / T$ [rad/s]
 Ψ = fázový posun [rad]

Ready 100% ode45

Block Parameters: Sine Wave

Sine Wave

Output a sine wave where the sine type determines the computational technique used. The parameters in the two types are related through:
 Samples per period = $2 \cdot \pi / (\text{Frequency} \cdot \text{Sample time})$
 Number of offset samples = $\text{Phase} \cdot \text{Samples per period} / (2 \cdot \pi)$

Use the sample-based sine type if numerical problems due to running for large times (e.g. overflow in absolute time) occur.

Parameters
 Sine type: Time based
 Amplitude: 1
 Bias: 0
 Frequency (rad/sec): $2 \cdot \pi$
 Phase (rad): 0
 Sample time: 0

Volba pracovního režimu:
 - spojité (Time based),
 - diskrétní (Sample)

Amplituda signálu
 Přesně
 Frekvence
 Fázový posun
 Perioda vorkování

Block Parameters: Integrator

Integrator

Continuous-time integration of the input signal

Parameters
 External reset: none
 Initial condition source: internal
 Initial condition: 0

Způsob spuštění
 měřičového nastavení

Výběr zdroje počáteční podmínky

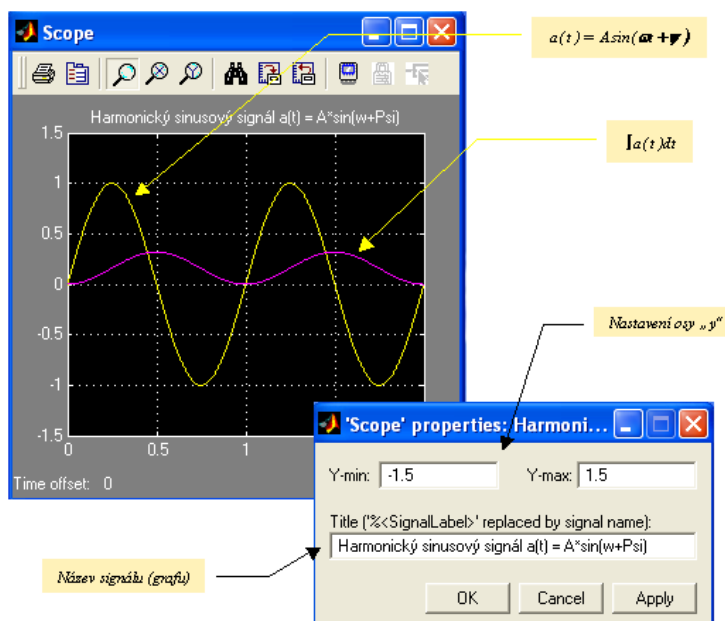
Počáteční podmínka

Interpret vec

OK

Limit output
 Upper saturation limit: inf
 Lower saturation limit: -inf
 Show saturation port
 Show state port
 Absolute tolerance: auto
 Enable zero crossing detection

OK Cancel Help Apply

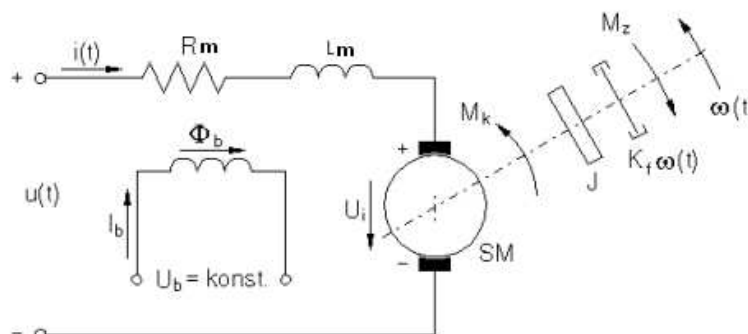


□ Subsystemy a knihovny

Pro vytváření subsystémů existuje řada důvodů, jako např.

- možnost přehledného zápisu složitých modelů,
- zjednodušení tvorby modelu v případě, že se skládá z více stejných nebo podobných částí,
- rozdělení na samostatně odladitelné subsystémy a tím i snadnější ladění složitých modelů.

Příklad 2: Stejnoseměrný motor s konstantním magnetickým tokem podle obr. je popsán soustavou diferenciálních rovnic



1. Budicí obvod :

$$U_b = R_b I_b + N_b \frac{d\Phi_b}{dt} + L_{b0} \frac{di_b}{dt}$$

Laplaceovou transformací obdržíme pro budicí obvod rovnici

$$U_b(s) = R_b I_b(s) + N_b s \Phi(s) + L_{b0} I_b(s)$$

kde $U_b [V]$ je budicí napětí, $R_b [\Omega]$ odpor budicího obvodu, $I_b [A]$ proud budicího obvodu, N_b počet závitů budicího vinutí, $\Phi_b [Wb]$ magnetický tok jednoho pólu, $L_{b0} [H]$ rozptylová indukčnost budicího vinutí, která nebude v dalším uvažována.

2. Obvod kotvy :

$$u(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} \pm N_s \frac{d\Phi(t)}{dt} + u_i(t)$$

$$U(s) = R_m I(s) + L_m s I(s) \pm N_s s \Phi(s) + U_i(s)$$

kde $R_m [\Omega]$ je výsledný odpor kotvového obvodu, $L_m [H]$ indukčnost stroje v příčné ose, \pm podle smyslu zapojení sériového vinutí, N_s počet závitů sériového vinutí, $u_i(t) = \Phi \omega$ je indukované napětí motoru.

3. Momentová podmínka :

$$M_m - M_z = M_{dyn} \quad M_m - M_z = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$M_m(s) - M_z(s) = Js\Omega(s)$$

kde $M_m = \Phi i(t)$ [Nm] je moment motoru, M_z [Nm] vnější zátěžný moment stroje, ω [rad/s] úhlová rychlost, J [kgm²] celkový redukovaný moment setrvačnosti všech rotujících dílů motoru.

Pro konstantní budicí proud, resp. pro motor s trvalými magnety při zanedbání rozptylových indukčností je magnetický tok $\Phi = konst$ a platí

$$C' \Phi = konst = C_u \quad [Vs]$$

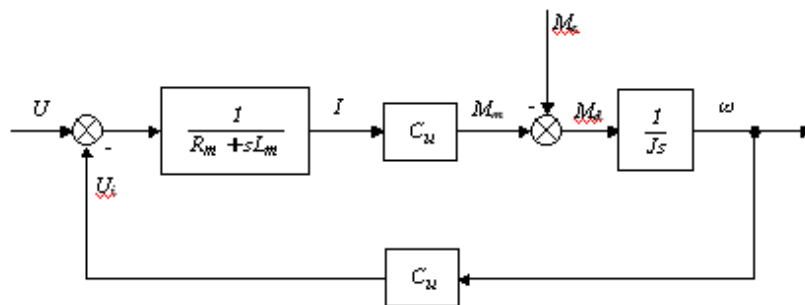
kde $C' = \frac{p' N_2}{2\pi a}$ je konstrukční konstanta motoru, N_2 počet vodičů kotvy, p' počet pólových párů motoru.

Matematický popis stejnosměrného motoru s konstantním magnetickým tokem po zavedení těchto předpokladů je dán pouze rovnicí obvodu kotvy motoru a momentovou podmínkou, ze kterých pak můžeme odvodit zjednodušené blokové schéma motoru.

$$U(s) = (R_m + sL_m)I(s) + U_i(s) = (R_m + sL_m)I(s) + C_u \Omega(s) \quad C_u I(s) - M_z(s) = Js\Omega(s)$$

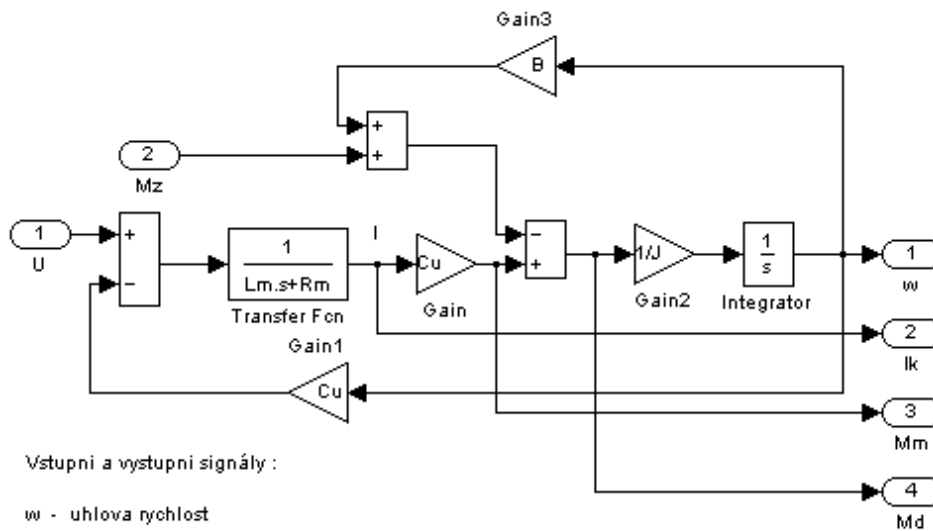
kde $C_u \Omega(s) = U_i(s)$ tj. Laplaceův obraz indukovaného napětí

4. Blokové schéma stejnosměrného motoru s konstantním magnetickým tokem :



11.4 Subsystém motoru v SIMULINKu :

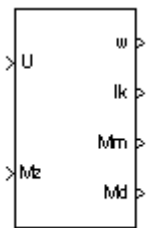
- standardní model v SIMULINKu doplníme vstupními a výstupními signály pomocí bloků knihovny **Ports & Subsystems** s názvy **In** a **Out**. Tyto bloky můžeme pojmenovat např. (U, Mz, w, Ik apod.) a jejich názvy se přenesou do bloku při vytváření subsystému,



Vstupní a výstupní signály :

- w - uhlova rychlost
- I - proud obvodu kotvy motoru
- U - napajeci (svorkove) napeti
- Mm - moment motoru
- Md - dynamicky moment
- Mz - zatezny moment
- B - koeficient vizkozniho treni

- po označení vstupů a výstupů vybereme všechny bloky, které mají být v subsystému a volbou **Edit/Create Subsystem (Ctrl+G)** vytvoříme subsystém,
- vzniklý subsystém je možno kopírovat i upravovat. Nové kopie je možné editovat a používat tak kopie s různými hodnotami parametrů,



Ss motor
s konst. mg. tokem

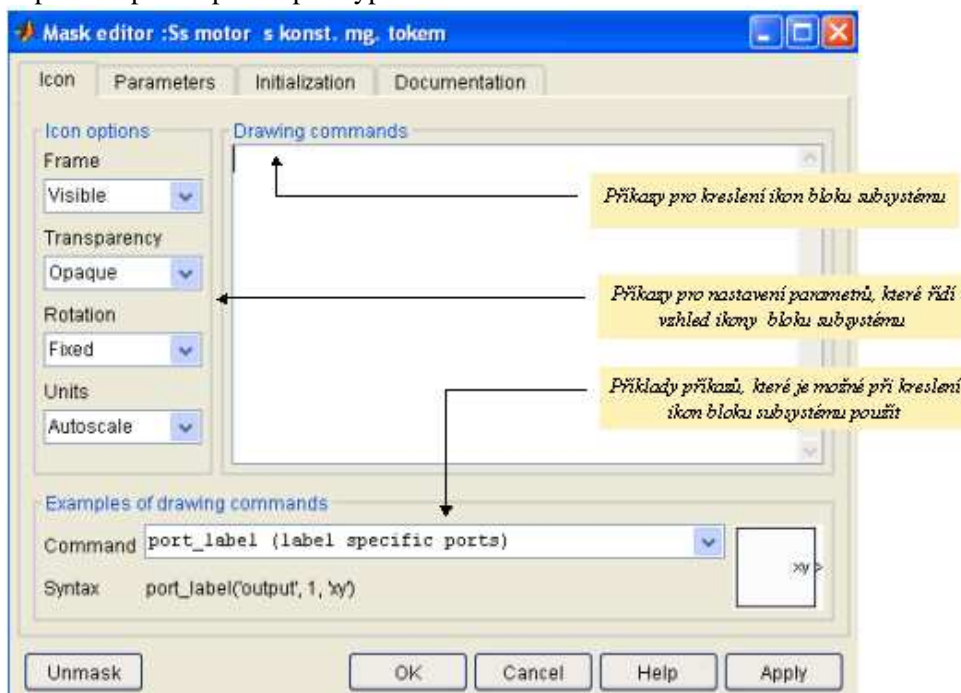
Pokud potřebujeme doplnit celkový popis subsystému nebo nechceme-li měnit číselné hodnoty, využijeme možnosti maskování subsystému.

Maskování po vybrání subsystému vyvoláme volbou **Edit/Mask Subsystem**

2. Maskování subsystému :

a. Záložka **Icon** :

- ikona subsystému se zadává pomocí standardních příkazů MATLABu. V uvedeném případě je explicitně použit příkaz pro výpis textu



b. Záložka **Parameters** :

- dovoluje v okně zadat názvy, popř. hodnoty proměnných použitých v parametrech bloků maskovaného subsystému, případně příkazy MATLABu,

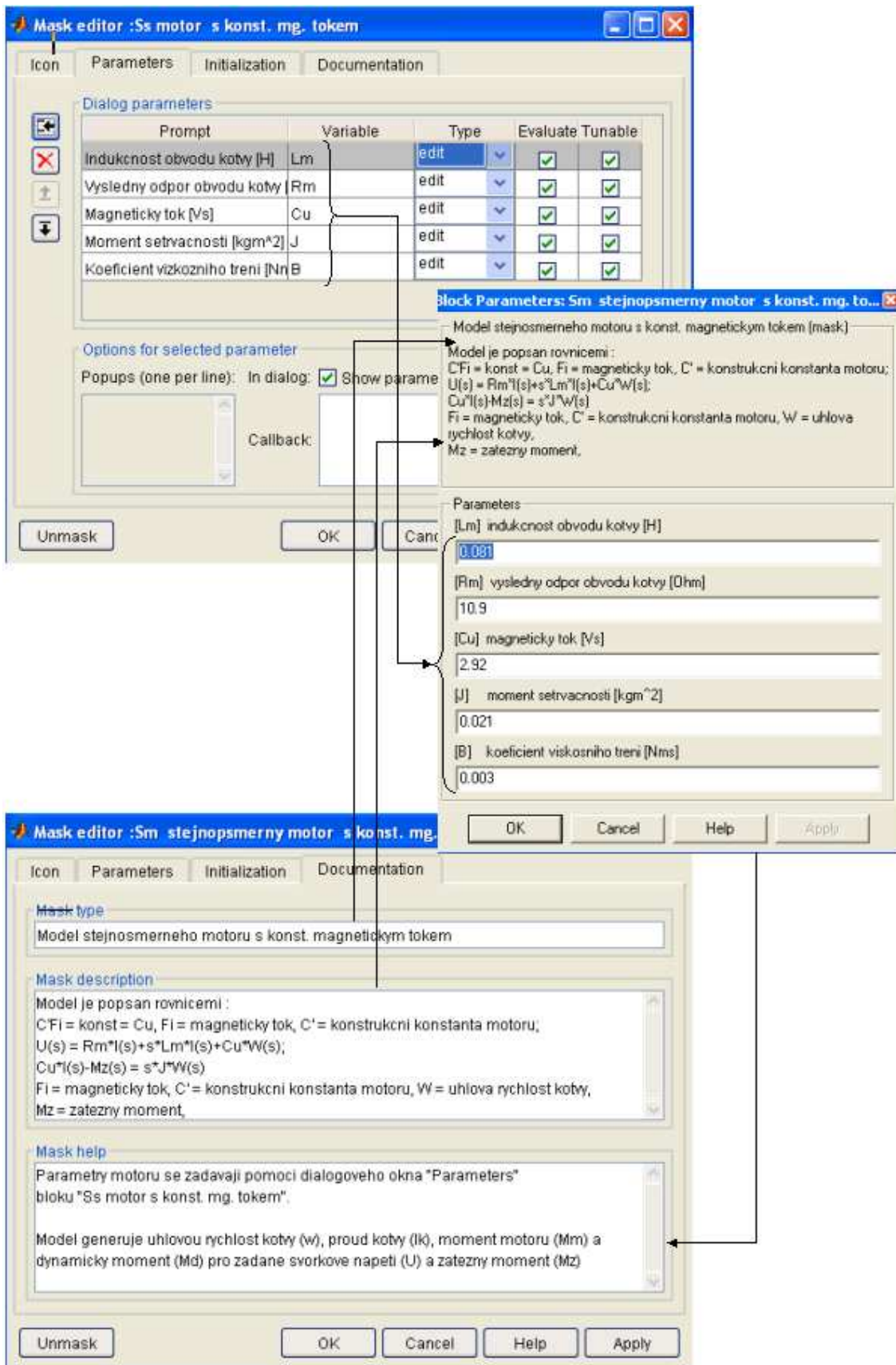
c. Záložka **Initialization** :

- dovoluje nastavení počátečních hodnot pro případné příkazy MATLABu které se mají provést po zadání hodnot.

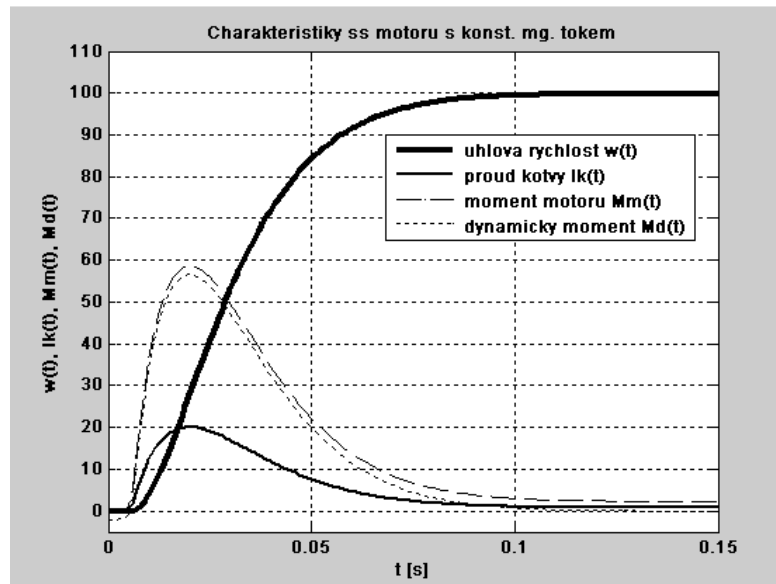
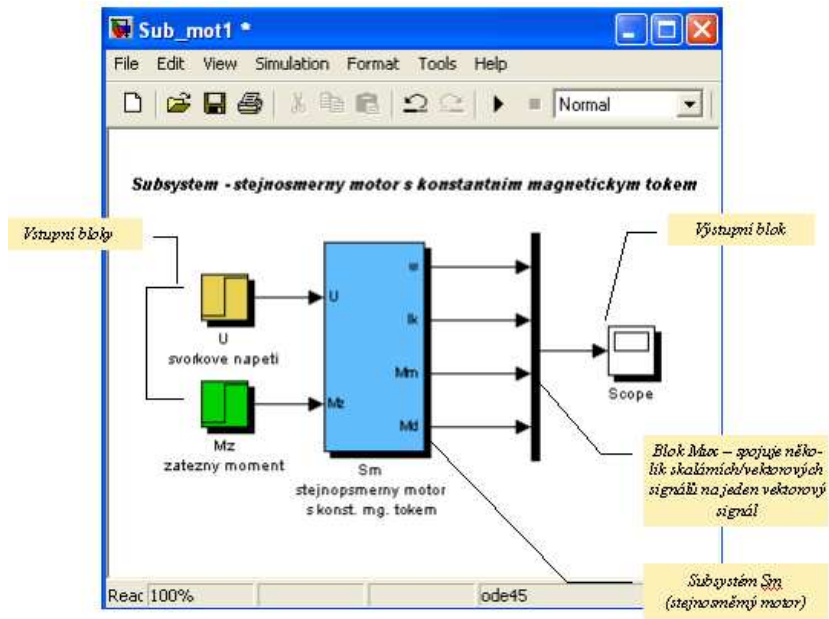
d. Záložka **Documentation** :

- dovoluje zadat popis a případnou nápovědu.

Hlavní činnosti při vytváření maskovaného subsystému ukazuje následující obrázek. Podrobný popis jednotlivých je možno nalézt v nápovědě **Help/Creating Masked Subsystems** .



Připojení vstupních a výstupních bloků a start simulace :



12. DISKRÉTNÍ ŘÍZENÍ

12.1 Diskrétní regulační obvod

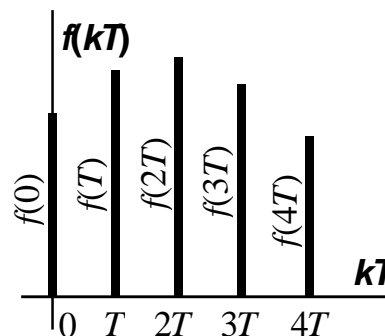
Spojité řízení se bez problémů používalo do doby, kdy byl za druhé světové války vynalezen radiolokátor pro zjišťování polohy letadel. Poloha letadla je veličina, která se mění naprosto spojitě v prostoru i čase. Pokud ji ale měříme radiolokátorem, jeví se jako nespojitá veličina, jejíž hodnotu známe pouze v určitých periodicky se opakujících okamžicích. A pokud se řídí zaměření protiletadlového děla, je vstupní řídicí informace nespojitá (v dalším budeme říkat diskretní) veličina. A zde právě skončí použití spojitěho řízení a nastupuje řízení diskretní. Regulační obvod musíme vyšetřovat jako **diskretní regulační obvod** [Isermann, 1989], [Raven, 1995], [Forsythe, Goodall, 1991].

V dnešní době je důvod vyšetřování regulačních obvodů jako diskretních hlavně někde jinde. Je to **použití počítače ve funkci regulátoru**. Zatím jsme mluvili o spojitých PID regulátorech, jejichž hardwarovým základem byl operační zesilovač a které pracovaly naprosto spojitě. Regulovanou veličinou – respektive regulační odchylkou – vstupující do regulátoru bylo spojitě se měnící napětí, to bylo v regulátoru zesilováno, derivováno, integrováno a výstupní akční veličinou bylo spojitě se měnící napětí, které zesílené ve výkonovém zesilovači pohánělo servomotor atd. Ve spojitém regulačním obvodu existovalo trvalé spojení mezi spojitým průběhem regulované veličiny $y(t)$ a na ni závislým průběhem akční veličiny $u(t)$. Tato nepřetržitost a trvalost sledování není naprosto nutná. Počítač dokáže zajistit funkci zesílení, derivace a integrace spojitěho regulátoru, ale jeho vstup nemůže být spojitě se měnící napětí, odpovídající regulované veličině. Musíme předřadit analogově-digitální převodník, a tak do počítače vstupuje už posloupnost impulsů – numerických hodnot a to už je diskretní veličina. Regulátor – počítač je schopen pracovat tak, že regulovanou veličinu y zjišťuje pouze v určitých okamžicích a pouze v těchto okamžicích počítá hodnotu akční veličiny u . Z počítače vystupuje opět posloupnost impulsů (opět diskretní veličina), které musí být nějak přetvořeny na spojitou veličinu, která může otáčet servomotorem, a tím zasahovat do regulované soustavy. A použití počítače ve funkci regulátoru je hlavní důvod, proč přecházíme od spojitěho řízení k řízení diskretnímu.

Diskretní regulační obvody jsou takové, v nichž alespoň jeden člen pracuje diskretně, tj. informaci přijímá nebo vydává, eventuálně obojí, v **diskretních časových okamžicích** (zpravidla rovnoměrných – ekvidistantních). Jinými slovy, **alespoň jedna veličina obvodu má tvar posloupnosti diskretních hodnot**.

Tuto vlastnost má řada technických zařízení jako jsou impulsní obvody, číslicové počítače atd. Vedle tohoto skutečného diskretního výstupu jsou diskretní i svou podstatou spojitě veličiny, které nemohou být měřeny spojitě. Jsou to již vzpomenuté polohy objektů, měřené radiolokátory. Nebo veličiny, jejichž hodnoty jsou přenášeny dálkovým přenosem s diskretním charakterem apod. Dnes ovšem nejčastějším případem diskretního systému řízení je **použití číslicového počítače jako regulátoru v systému automatického řízení**.

Ještě než se dostaneme k diskretnímu regulačnímu obvodu, zavedeme si pojem diskretní funkce. **Diskretní funkce $f(kT)$** je charakterizována posloupností hodnot $f(0), f(T), f(2T), \dots$ v tzv. vzorkovacích okamžicích, tj. v čase $t = 0, T, 2T, \dots$ (obr. 12.1). Mimo časové okamžiky vzorkování není funkce $f(kT)$ definována – není informace o hodnotě příslušné veličiny než v uvedené časové okamžiky. Časové okamžiky, v nichž je funkce $f(kT)$ definována, jsou ekvidistantní $t = kT$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$ Čas $t = kT$ se nazývá diskretní čas a zápisem funkce $f(kT)$ je na první pohled jasné, že se jedná o diskretní časovou funkci. Hodnota T se nazývá **vzorkovací perioda**, má rozměr [s] a je vztahem

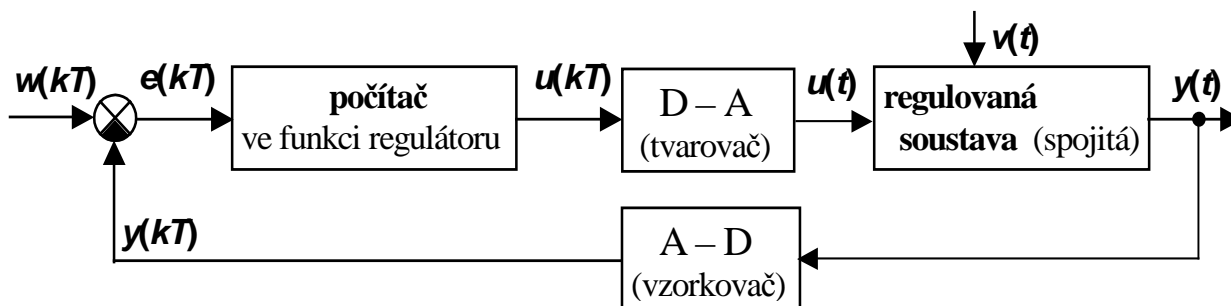


Obr. 12.1

$$\omega_v = \frac{2\pi}{T} \quad (12.1)$$

vázána se **vzorkovací frekvencí ω_v** .

Blokové schéma diskrétního regulačního obvodu je na obr. 12.2. Jedná se o nejběžnější typ regulačního obvodu, kdy je regulována spojitá soustava, a tedy máme spojitou regulovanou veličinu $y(t)$. Ta je prostřednictvím analogově-digitálního převodníku (v regulační technice nazývaný vzorkovač) vzorkována s periodou T a převedena do číslicového tvaru, tj. na diskrétní funkci $y(kT)$. Počítač vypočítá ze vstupní řídicí (žádané) veličiny $w(kT)$, která je už pochopitelně zadávána v číslicovém tvaru, a z $y(kT)$ regulační odchylku

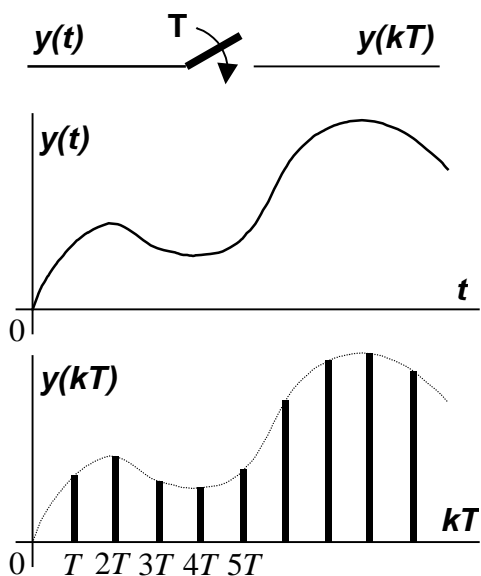


Obr. 12.2

Diskrétní regulační obvod

$e(kT)$ a vlastní řídicí algoritmus počítače určí hodnotu akčního zásahu $u(kT)$. Tato hodnota je digitálně-analogovým převodníkem (v regulační technice nazývaný tvarovač) převedena na spojitý signál $u(t)$, který prostřednictvím regulačního orgánu působí na regulovanou soustavu.

Počítačům ve funkci regulátoru, jejich algoritmům a způsobům, jak nahrazují spojité regulátory (jak provádí zesilování, integraci a derivaci vstupní regulační odchylky) bude věnována celá jedna kapitola. Na tomto místě se budeme věnovat dvěma novým členům regulačního obvodu, které neznáme ze spojitých obvodů, a to jsou vzorkovač a tvarovač.



Obr. 12.3

Vzorkovač a vzorkování

Vzorkovač a vzorkování. Vzorkovač provádí periodické snímání hodnoty vstupní veličiny – např. regulované veličiny y . Její hodnotu odeberá v pravidelných intervalech ve formě vzorků a mezi dvěma odběry ho průběh této veličiny nezajímá. Ve schématech se vzorkovač, jinak analogově-digitální převodník, znázorňuje jako spínač – je to na obr. 12.3, z kterého je také patrný princip vzorkování regulované veličiny y .

Princip řízení takto popsaný nazýváme **diskrétní** podle vlastnosti, že po většinu doby není vzorkovaná regulovaná veličina vůbec sledována a regulátor nepřestavuje akční veličinu, takže řízení je „skryto, utajeno, diskrétní“ a rovněž tak příslušné veličiny jsou „skryty, utajeny, diskrétní“.

Základní otázkou diskrétního řízení je **délka periody vzorkování T** , tedy po jak dlouhou dobu může být regulovaná veličina bez sledování a regulovaná soustava bez akčního zásahu. Intuitivně cítíme, že čím je regulovaná soustava „pomalejší“ (přesněji: čím má delší časové konstanty), tím bude delší i perioda vzorkování. Budeme-li řídit kormidlem kurs zaoceánské lodi, je regulovaná soustava („lod“) pomalá soustava s dlouhými časovými konstantami a můžeme si dovolit při návrhu automatického diskrétního řízení volit dlouhou vzorkovací periodu.

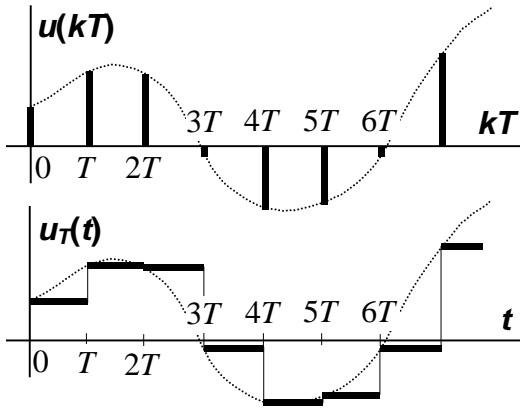
Z této úvahy vycházejí různé empirické vzorce, které pomáhají při rychlé volbě vzorkovací periody.

Podle nich se např. k regulované soustavě o přenosu $G_S(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots}$ volí vzorkovací perioda

$T \cong 0,5\tau_{\min}$ nebo $T \cong \left(\frac{1}{4} \text{ až } \frac{1}{2}\right) \sum \tau_i$ či u soustav s dopravním zpožděním je vzorkovací perioda volena v závislosti na dopravním zpožděním T_D také určitými empirickými vztahy.

Přesněji lze zvolit vzorkovací periodu na základě úvahy o průběhu signálu $y(t)$. Tento signál lze rozložit v jednotlivé harmonické – je možné získat jeho amplitudové spektrum. Příklad takového spektra je na obr. 12.4. Toto spektrum obsahuje jednotlivé harmonické až do frekvence ω_m , kdy už je pro frekvence $\omega > \omega_m$ amplituda těchto harmonických nulová. Tato frekvence se nazývá *mezní úhlová frekvence*. Je ovšem problematické získání amplitudového spektra signálu a ještě problematičtější stanovení mezní úhlové frekvence, kterou ještě chceme vzorkováním zachytit. Pokud jsme schopni tuto mezní frekvenci stanovit, pak lze zvolit periodu vzorkování T podle **Shannonovy podmínky vzorkování**

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_m} \quad (12.2)$$



Obr. 12.5

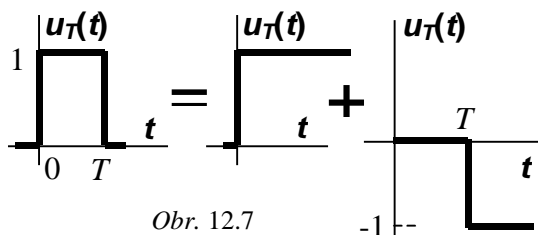
je nositelem informace, v žádném případě však energie, kterou by mohl předávat následujícímu členu obvodu. Tvarování diskrétního signálu je v podstatě jeho přeměna na spojitý signál (nebo alespoň po částech spojitý). Tento signál pak musí být schopen předávat následujícímu členu jednak informaci a jednak potřebnou energii.

Většinou se používá tvarovače nultého řádu a v dalším se zaměříme pouze na tento typ tvarovače. Výstupní veličina tvarovače je po celou dobu periody T konstantní a je rovna amplitudě vstupního impulsu, přivedeného na počátku této periody. Je to schodová funkce a princip tvarovače je patrný z obr. 12.5.

Pro další práci s diskrétními obvody je potřeba znát přenos tvarovače $G_T(s)$, který je spojitým členem a který si nyní odvodíme.

Přivedme na vstup tvarovače jeden jednotkový impuls $\delta(kT)$. Diskrétní jednotkový impuls $\delta(kT)$ je diskrétní verze spojitěho jednotkového (Diracova) impulsu a je definován vztahem

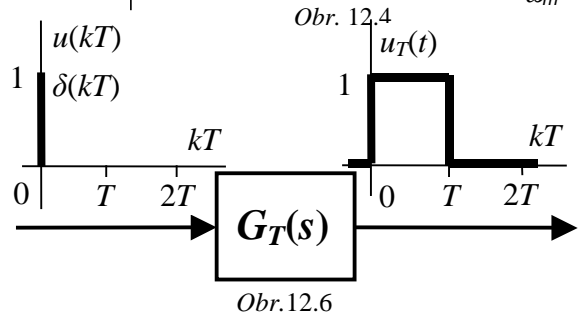
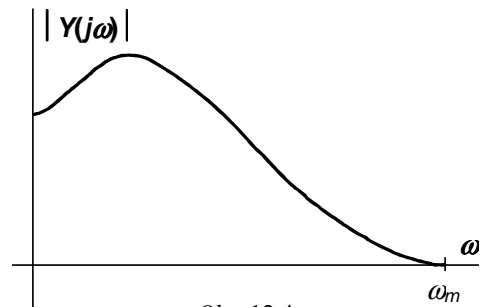
$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k \neq 0 \end{cases}$$



Obr. 12.7

$$L\{u_T(t)\} = L\left\{ \begin{array}{c} \text{step} \\ \text{function} \end{array} \right\} + L\left\{ \begin{array}{c} \text{step} \\ \text{function} \end{array} \right\} = \frac{1}{s} - e^{-Ts} \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (12.3)$$

Tvarovač a tvarování. Působí-li diskrétní signál (konkrétně akční zásah $u(kT)$) jako vstupní veličina do spojitě regulované soustavy, je potřeba ho upravit – tvarovat. Diskrétní signál totiž obsahuje řadu nekonečně krátkých impulsů, jejichž amplituda



Obr. 12.6

Na výstupu tvarovače bude podle obr. 12.6 pravoúhlá schodová funkce o šířce T a amplitudě rovné jedné. Pro určení jejího Laplaceova obrazu si ji můžeme představit jako součet dvou skokových funkcí posunutých navzájem o čas T a majících rozdílná znaménka – obr. 12.7. Laplaceův obraz této schodové funkce dostaneme jako součet obrazů obou skokových funkcí

K určení Laplaceova obrazu skokové funkce posunuté o čas T jsme použili větu o posunutí v Laplaceově transformaci. Protože Laplaceův obraz jednotkového impulsu je

$$L\{\delta(kT)\} = 1 \quad (12.4)$$

bude přenos tvarovače 0-tého řádu

$$G_T(s) = \frac{L\{u_T(t)\}}{L\{\delta(kT)\}} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (12.5)$$

12.2 Z-transformace

Z-transformace je matematický aparát, který využíváme především při popisu, analýze i syntéze diskretních regulačních systémů. Má zde stejnou funkci jako Laplaceova transformace u spojitých systémů. Z-transformaci je ale možné využívat i u spojitých systémů.

12.2.1 Přímá transformace

Laplaceův obraz spojitě funkce $f(t)$ je dán vztahem (12.2)

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Vzorkujeme-li tuto funkci vzorkovačem s periodou T , dostaneme diskretní funkci $f(kT)$ a její Laplaceův obraz získáme stejně, ale musíme přejít od integrálu k sumě

$$L\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} \quad (12.6)$$

Zavedeme-li novou proměnnou z vztahem

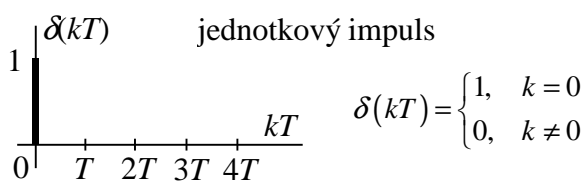
$$z = e^{sT} \quad (12.7)$$

definuje nám tento vztah Z – obraz (na pravé straně zmizelo s , je to funkce nové proměnné z)

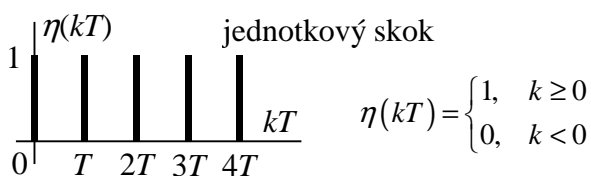
$$F(z) = Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \quad (12.8)$$

Zdůrazněme, že Z -obraz tímto vztahem definovaný je pouze pro diskretní funkce ($k \geq 0$) a nelze ho použít pro spojitě funkce [Leigh, 1993].

- Příklad 12.1:** Určete Z -obraz
- jednotkového diskretního impulsu $\delta(kT)$
 - jednotkové diskretní skokové funkce $\eta(kT)$
 - diskretní funkce, kterou získáme vzorkováním spojitě funkce $f(t) = e^{-2t}$ se vzorkovací periodou $T = 1$ [s]



Obr. 12.8



Obr. 12.9

Řešení: Definice a znázornění jednotkového diskretního impulsu $\delta(kT)$ je na obr. 12.8 a jednotkové diskretní skokové funkce $\eta(kT)$ vidíme na obr. 12.9. Obě tyto funkce jsou velmi důležité a budeme je stále potřebovat, proto je dobré si jejich definice zapamatovat. Nyní použijeme definiční vztah Z -obrazu (12.8) a Z -obraz těchto funkcí spočítáme.

U obou funkcí se jedná o nekonečnou geometrickou řadu, v níž každý následující člen řady dostaneme z předchozího vynásobením kvocientem q . Pro součet geometrické řady s prvním členem a_0 a kvocientem q platí vztah $s = \frac{a_0}{1 - q}$.

$$a) Z\{\delta(kT)\} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

$$b) Z\{\eta(kT)\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$c) Z\{e^{-2kT}\} = 1 + e^{-2T} z^{-1} + e^{-4T} z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-2T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

Stejně jako u Laplaceovy transformace se výpočet Z-obrazů obvykle neprovádí výpočtem podle definičního vztahu (12.8), jako tomu bylo u těchto příkladů, ale používá se operátorový slovník Z-transformace. V operátorovém slovníku Z-transformace jsou obdobně jako u slovníku Laplaceovy transformace diskrétní funkce $f(kT)$ a příslušný Z-obraz $F(z)$. V každém řádku slovníku je navíc také odpovídající spojitá funkce $f(t)$, z které se vzorkováním diskrétní funkce získala a její Laplaceův obraz $F(s)$. To, jak uvidíme později, bude často velmi užitečné. Operátorový slovník základních funkcí je v tab. 12.1.

Příklad 12.2: Použitím operátorového slovníku Z-transformace určete Z-obraz diskrétní funkce $f(kT)$, která vznikne vzorkováním spojitě funkce $f(t) = t \cdot e^{-2t}$, je-li $f(t)$ vzorkována vzorkovačem se vzorkovací periodou $T = 2$ [s].

Řešení: Obraz diskrétní funkce vzniklé vzorkováním spojitě funkce $f(t) = t \cdot e^{-2t}$ je podle slovníku

$$F(z) = \frac{Tze^{-2T}}{(z - e^{-2T})^2}$$

Dosadíme-li $T = 2$, je

$$F(z) = \frac{2ze^{-4}}{(z - e^{-4})^2} = \frac{0,037z}{z^2 - 0,037z + 0,00034}$$

Poznámka: Všimněte si, že po dosazení konkrétní hodnoty T je Z-obraz vždy racionální lomená funkce proměnné z .

$f(t)$	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	1
$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\eta(kT)$	$\frac{z}{z - 1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{zT}{(z - 1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{z(z + 1)T^2}{2(z - 1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{zTe^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$a \frac{t}{T}$	$\frac{1}{s - \frac{\lg a}{T}}$	a^k	$\frac{z}{z - a} \quad (a > 0)$

$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega T$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

Tab. 12.1

Operátorový slovník L - a Z -transformace

Příklad 12.3: Určete Z -obraz diskrétní funkce, vzniklé vzorkováním spojité funkce, jejíž Laplaceův obraz je $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$.

Řešení: Rozložíme funkci $F(s)$ na součet parciálních zlomků

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

a použitím operátorového slovníku určíme Z -obraz

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{zTe^{-T}}{(z-e^{-T})^2}$$

Poznámka: Pokud budeme v budoucnu v takových případech používat zkrácené označování

$$Z\{F(s)\}$$

což je v tomto případě $Z\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{zTe^{-T}}{(z-e^{-T})^2}$

znamená to určení Z -obrazu $F(z)$ diskrétní časové funkce $f(kT)$, která vznikla vzorkováním s periodou T spojité funkce $f(t)$, jejíž Laplaceův obraz je $F(s)$. Správně zapsáno je to takto

$$Z\{F(s)\} = Z\{V\{L^{-1}\{F(s)\}\}\} \quad (12.9)$$

kde operace $V\{ \}$ představuje vzorkování s periodou T . Samozřejmě pro toto hledání „ Z -obrazu k Laplaceovu obrazu“ je výhodný operátorový slovník Z -transformace se spojitou funkcí a jejím Laplaceových obrazem na jednom řádku.

12.2.2 Zpětná transformace

Při zpětné transformaci [Kachaňák, 1987] hledáme k danému obrazu $F(z)$ originál, tedy diskrétní časovou funkci $f(kT)$ a toto symbolicky vyjadřujeme zápisem

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} \quad (12.10)$$

Zpětná transformace souvisí s funkcí komplexní proměnné. Podle definičního vztahu Z -transformace (12.8)

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

se na Z -obraz můžeme dívat jako na Laurentovu řadu a originál $f(kT)$ určit jako koeficienty této řady vztahem

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) \cdot z^{k-1} dz \quad (12.11)$$

To je definiční vztah zpětné Z -transformace. Integrace se provádí po křivce, která zahrnuje všechny póly výrazu $F(z)z^{k-1}$. Integrál vyčíslíme použitím residuové věty, takže je

$$f(kT) = \sum_{\text{póly } F(z)z^{k-1}} \text{Res}\{F(z)z^{k-1}\} \quad (12.12)$$

Výraz z^{k-1} nemá žádné póly až na jedinou výjimku a tou je výpočet residua pro $k = 0$. V tomto případě má funkce $z^{k-1} = z^{-1} = \frac{1}{z}$ jeden pól a to $z = 0$. Proto výpočet $f(kT)$ podle (12.12) většinou rozdělujeme na dva případy a tedy na dva vztahy pro $k = 0$ a pro $k \geq 1$

$$f(kT) = \begin{cases} \sum_{\text{póly } F(z); 0} \text{Res}\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} & \text{pro } k = 0 \\ \sum_{\text{póly } F(z)} \text{Res}\{F(z)z^{k-1}\} & \text{pro } k \geq 1 \end{cases} \quad (12.13)$$

(Zde je vysvětlení, proč v operátorovém slovníku najdeme někdy jako originál jiný výraz pro $k = 0$ a jiný pro $k \geq 1$).

Pro výpočet residuí funkce $f(z)$ (najde se v učebnicích matematiky – kapitola Funkce komplexní proměnné) platí vztahy:

-má-li funkce $f(z)$ v z_0 jednoduchý pól

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (12.14)$$

-má-li funkce $f(z)$ v z_0 k -násobný pól

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] \quad (12.15)$$

Originál k Z-obrazu můžeme najít v podstatě trojím způsobem

- výpočtem s použitím definičního vztahu zpětné Z-transformace;
- užitím operátorového slovníku Z-transformace;
- dělením polynomu čitatele polynomem jmenovatele (nejpoužívanější způsob).

První způsob je pouze teoretický a pro výpočtovou praxi nepřijatelný. Druhý způsob se často používá, ale má svá úskalí. Především ale předpokládá rozklad v parciální zlomky, což je někdy zdoluhavá operace. Použití operátorového slovníku z tab. 12.1 je spojeno s více obtížemi a proto je možno doporučit speciální slovník pro zpětnou transformaci, uvedený v tab. 12.2. Ten vychází z toho, že Z-obrazy po dosazení hodnoty T jsou racionální lomené funkce s proměnnou z (poznámka za příkladem 12.2).

Nejpoužívanější se jeví třetí numerický způsob, dělení polynomu čitatele polynomem jmenovatele. Jeho princip si nyní vysvětlíme.

Je-li Z-obraz $F(z)$ dán v tvaru zlomku

$$F(z) = \frac{M(z)}{N(z)} \quad (12.16)$$

můžeme provést dělení polynomu $M(z)$ polynomem $N(z)$ a získat mocninnou řadu ve tvaru

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots \quad (12.17)$$

Porovnáním této řady s definičním vztahem Z-obrazu (12.8)

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

vidíme, že koeficienty mocninné řady (12.17) jsou přímo hodnoty diskrétní funkce $f(kT)$

$$f(0) = f_0; \quad f(T) = f_1; \quad f(2T) = f_2; \quad \dots$$

Částečnou nevýhodou této metody je, že originál dostaneme v tzv. „otevřeném“ tvaru, jako posloupnost numerických hodnot. Někdy by se nám tato originální funkce hodila spíše v tzv. „uzavřeném“ tvaru, jako algebraický výraz. Výhodou metody zase naopak je, že při výpočtu např. impulsních nebo přechodových funkcí tyto získáme konkrétně numericky, a to je většinou žádoucí.

Dělení polynomu čitatele polynomem jmenovatele provádíme jako písemné dělení a bude ukázáno na příkladu.

Příklad 12.4: Stanovte originál $f(kT)$ k funkci $F(z) = \frac{z-3}{z^2-z+2}$.

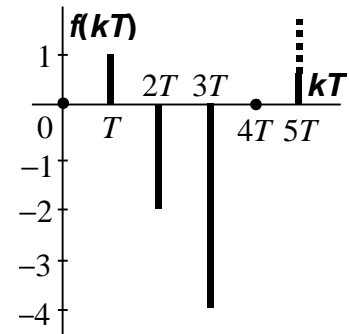
Řešení:

$$(z-3) : (z^2 - z + 2) = z^{-1} - 2z^{-2} - 4z^{-3} + 8z^{-5} + \dots$$

$$-(z-1+2z^{-1}) \quad \boxed{f(T)} \quad \boxed{f(2T)} \quad \boxed{f(3T)} \quad \boxed{f(5T)}$$

$$\begin{array}{r} 0-2-2z^{-1} \\ -(-2+2z^{-1}-4z^{-2}) \\ \hline 0-4z^{-1}+4z^{-2} \\ -(-4z^{-1}+4z^{-2}-8z^{-3}) \\ \hline 0+0+8z^{-3} \\ \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(T) = 1 \\ f(2T) = -2 \\ f(3T) = -4 \\ f(4T) = 0 \\ f(5T) = 8 \\ \dots \end{array}$$



Obr. 12.10

Grafické znázornění funkce $f(kT)$ je na obr. 12.10

Příklad 12.5: Stanovte originál $f(k)$ k funkci $F(z) = \frac{z(3z+4)}{(z+2)(z+3)(z+4)}$.

Řešení: Funkci $F(z)$ rozložíme na parciální zlomky

$$F(z) = -\frac{z}{z+2} + \frac{5z}{z+3} - \frac{4z}{z+4}$$

Podle operátorového slovníku pro provádění zpětné Z-transformace v tab. 12.2 je

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = a^k \quad \text{pro } k \geq 0$$

a tedy originál k $F(z)$ je

$$f(k) = -(-2)^k + 5(-3)^k - 4(-4)^k$$

který platí obecně pro $k \geq 0$. Uvažovali jsme jako u operátor. slovníku v tab. 12.2 volbu $T = 1$ [s].

$f(k)$		$F(z)$	$f(k)$		$F(z)$
0	kromě $f(0)=1$	1	$k+1$	kromě $f(0)=1$	$\frac{z^2}{(z-1)^2}$
0	kromě $f(1)=1$	$\frac{1}{z}$	a^{k-1}	kromě $f(0)=0$	$\frac{1}{z-a}$
0	kromě $f(2)=1$	$\frac{1}{z^2}$	$(k-1)a^{k-2}$	kromě $f(0)=0$	$\frac{1}{(z-a)^2}$
0	kromě $f(3)=1$	$\frac{1}{z^3}$	$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)a^{k-3}$	kromě $f(0)=0$	$\frac{1}{(z-a)^3}$
1	kromě $f(0)=0$	$\frac{1}{z-1}$	a^k		$\frac{z}{z-a}$
$k-1$	kromě $f(0)=0$	$\frac{1}{(z-1)^2}$	ka^{k-1}		$\frac{z}{(z-a)^2}$

$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$	kromě $f(0)=0$	$\frac{1}{(z-1)^3}$	$\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
1		$\frac{z}{z-1}$	$(k+1)a^k$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
k		$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{1}{a-b}(a^{k-1}-b^{k-1})$ $a \neq b$	kromě $f(0)=0$ $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$
$\frac{1}{2}k(k-1)$		$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\frac{1}{a-b}(a^k-b^k)$ $a \neq b$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$

Tab. 12.2 Operátorový slovník pro provádění zpětné Z-transformace (pro zjednodušení $T = 1$ [s])

$$(z-2)(z-3)(z-4) = z^3 + 9z^2 + 26z + 24$$

k	$f(k)$
0	0
1	3
2	-23
3	129
...	...

$$(3z^2 + 4z) : (z^3 + 9z^2 + 26z + 24) = 3z^{-1} - 23z^{-2} + 129z^{-3} + \dots$$

$-(3z^2 + 27z + 78 + 72z^{-1})$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
$0 \quad -23z - 78 - 72z^{-1}$			
$-(-23z - 207 - 598z^{-1} - 552z^{-2})$			
$0 \quad +129 + 526z^{-1} + 552z^{-2}$			

$f(0) = 0 ; f(1) = 3 ; f(2) = -23 ; f(3) = 129 ; \dots$

Příklad 12.6: Stanovte originál $f(k)$ k funkci $F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$.

Řešení: Funkci $F(z)$ rozložíme na parciální zlomky

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Podle operátorového slovníku pro provádění zpětné Z-transformace v tab. 12.2 je

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k=0 \\ a^{k-1} & \text{pro } k \geq 1 \end{cases} \quad \text{a} \quad Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k=0 \\ 1 & \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

Je tedy pro $k = 0$: $f(k) = 0 - 0 = 0$
 $k \geq 1$: $f(k) = 2 \cdot 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1$

a to se dá zobecnit jako řešení

$$f(k) = 2^k - 1$$

platící pro oba případy $k = 0$ i pro $k \geq 1$.

Příklad 12.7: Stanovte originál $f(kT)$ k funkci $F(z) = \frac{z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}$ použitím vztahu zpětné Z-transformace.

Řešení: Použijeme vztah pro výpočet $f(kT)$ (12.12) a k výpočtu residuí větu (12.14) pro jednoduché póly
Funkce $F(z)$ má dva jednoduché póly $z_1 = 1$ a $z_2 = e^{-2T}$, a je tedy

$$f(kT) = \sum_{z \rightarrow 1; e^{-2T}} \operatorname{Res} \left\{ \frac{z^k (1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{z^k (1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})} \right] + \lim_{z \rightarrow e^{-2T}} \left[(z-e^{-2T}) \frac{z^k (1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})} \right] =$$

$$= \frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-2T}} + \frac{e^{-2kT} (1-e^{-2T})}{(e^{-2T}-1)} = 1 - e^{-2kT}$$

Příklad 12.8: Stanovte originál $f(kT)$ k funkcím $F(z) = 1; \frac{1}{z}; \frac{1}{z^2}; \dots; \frac{1}{z-a}; \frac{1}{(z-a)^2}; \dots; \frac{z}{z-a}$.

Výsledky použijte pro konfrontaci se slovníkem zpětné Z-transformace tab. 12.2.

Řešení:

$$F(z) = 1 \rightarrow \begin{cases} f(0) = \sum_{z \rightarrow 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z} = 1 \\ f(k) = \sum_{\substack{\text{žádné} \\ \text{póly } F(z)}} \operatorname{Res} \{ 1 \cdot z^{k-1} \} = 0 \quad \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{1}{z} \rightarrow f(k) = \sum_{z \rightarrow 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z} \cdot z^{k-1} \right\} \rightarrow \begin{cases} f(0) = \sum_{z \rightarrow 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z^2} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{1}{z^2} \right) = 0 \\ f(1) = \sum_{z \rightarrow 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z} = 1 \\ f(2) = \sum_{z \rightarrow 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z} \cdot z \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot 1 = 0 \\ \text{a podobně } f(3) = f(4) = \dots = 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{1}{z-a} \rightarrow \begin{cases} f(0) = \sum_{z \rightarrow a; 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z} \frac{1}{z-a} \right\} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{1}{z(z-a)} + \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z-a)} = 0 \\ f(k) = \sum_{z \rightarrow a} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z-a} \cdot z^{k-1} \right\} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{z^{k-1}}{z-a} = a^{k-1} \quad \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{z}{z-a} \rightarrow \begin{cases} f(0) = \sum_{z \rightarrow a; 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z-a} \right\} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{z-a} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z-a} = 1 \\ f(k) = \sum_{z \rightarrow a} \operatorname{Res} \left\{ \frac{z \cdot z^{k-1}}{z-a} \right\} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{z^k}{z-a} = a^k \quad \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

Abychom nemuseli vyjadřovat originál $f(k)$ eventuálně $f(kT)$ zvlášť pro $k = 0$ a zvlášť pro $k \geq 1$, je možno pro její vyjádření použít funkci jednotkový diskretní impuls $\delta(k)$ anebo jednotkový diskretní skok $\eta(k)$.

Chceme-li například vyjádřit, že originál k funkci $F(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ je funkce

$$f(k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 0 \\ k-1 & \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

zapíšeme užitím funkce $\eta(k)$ tuto skutečnost takto

$$f(k) = (k-1)\eta(k-1)$$

Tak je možné sestavit praktický operátorový slovník Z-transformace uvedený v tab. 12.2, který je zvláště vhodný pro zpětnou transformaci všech racionálních lomených funkcí, které se vyskytují při řešení diferenčních rovnic, při určování odezvy systémů apod.

12.2.3 Vlastnosti Z-transformace

Jsou analogické vlastnostem Laplaceovy transformace. Uveďme si jen nejdůležitější. Pokládejme $T = 1$ [s].

Věta o linearitě je stejná jako v Laplaceově transformaci:

$$Z\{af(k) + bg(k)\} = aF(z) + bG(z) \quad (12.18)$$

Věty o posunutích v Z-transformaci nahrazují věty o derivaci v Laplaceově transformaci. Nejdříve věta o posunutí o jednu periodu (nahrazuje větu o první derivaci). Pozn.: Aby funkce mohla být originálem pro Z-transformaci, musí být $f(k) = 0$, pro $k < 0$:

záporné posunutí (zpětné)	kladné posunutí (dopředné)	
$Z\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z)$	$Z\{f(k+1)\} = zF(z) + zf(0)$	(12.19)

A ještě uveďme větu o posunutí o dvě, tři, ... periody:

záporné posunutí	kladné posunutí	
$Z\{f(k-2)\} = z^{-2}F(z)$	$Z\{f(k+2)\} = z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$	
$Z\{f(k-3)\} = z^{-3}F(z)$	$Z\{f(k+3)\} = z^3F(z) - z^3f(0) - z^2f(1) - zf(2)$	(12.20)

Obecná věta o posunutí o m period:

záporné posunutí	kladné posunutí	
$Z\{f(k-m)\} = z^{-m}F(z)$	$Z\{f(k+m)\} = z^m \left[F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f(i)z^{-i} \right]$	(12.21)

Pro úplnost si uveďme tyto věty pro obecné $T \neq 1$

$$Z\{f[(k-1)T]\} = z^{-1}F(z) \quad Z\{f[(k+1)T]\} = zF(z) + zf(T) \quad (12.19a)$$

$$Z\{f[(k-m)T]\} = z^{-m}F(z) \quad Z\{f[(k+m)T]\} = z^m \left[F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f(i)z^{-i} \right] \quad (12.21a)$$

Věty o počáteční a konečné hodnotě jsou analogické stejným větám v Laplaceově transformaci

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) \quad f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) \quad (12.22)$$

Věta o součtu vzorků

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) \quad (12.23)$$

Věta o obrazu konvoluce

$$Z\left\{ \sum_{i=0}^k f[(k-i)T] \cdot g[iT] \right\} = F(z) \cdot G(z) \quad (12.24)$$

Příklad 12.9: Ověřte vztahy (12.21a) pro obecné $T \neq 1$

Řešení:

$$\begin{aligned} Z\{f[(k-m)T]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f[(k-m)T]z^{-k} = \sum_{k=-m}^{\infty} f(k)z^{-(m+k)} = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \\ &= z^{-m} \underbrace{\{f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots\}}_{F(z)} = z^{-m} F(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z\{f[(k+m)T]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f[(k+m)T]z^{-k} = f(mT) + f[(1+m)T]z^{-1} + f[(2+m)T]z^{-2} + \dots = / \cdot z^m \cdot z^{-m} \\ &= z^m \{f(mT)z^{-m} + f[(1+m)T]z^{-(1+m)} + f[(2+m)T]z^{-(2+m)} + \dots\} = \\ &= z^m \{F(z) - f(0) - f(T)z^{-1} - f(2T)z^{-2} - \dots - f[(m-1)T]z^{-(m-1)}\} = \\ &= z^m \left[F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(iT)z^{-i} \right] = z^m F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(iT)z^{m-i} \end{aligned}$$

12.3 Diferenční rovnice

12.3.1 Zavedení diferenčních rovnic a jejich řešení

Tak jako základním tvarem matematického popisu spojitého systému jsou diferenciální rovnice, tak základem matematického popisu diskrétních systémů jsou diferenční rovnice.

V minulých kapitolách byl zaveden pojem diskrétní funkce $f(kT)$, což je posloupnost diskrétních hodnot $f(0), f(T), f(2T), \dots$ v ekvidistantních časových okamžicích $t = kT$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$ atd. V diferenčních rovnicích budeme bez vlivu na obecnost předpokládat $T = 1$ [s] a diskrétní čas bude k místo kT . Posloupnost diskrétních funkčních hodnot tedy bude $f(0), f(1), f(2), \dots$ atd.

Základem diferenčních rovnic je pojem **diference funkce** (zde už stále máme na mysli diskrétní funkci). První diference je dána rozdílem dvou sousedních diskrétních hodnot. Přitom je možno použít dvou způsobů definování diferencí, a to jako dopřednou diferenci anebo jako zpětnou diferenci:

dopředná diference	zpětná diference	
$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$	$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$	(12.25)

V obou případech je první diference analogií první derivace u spojitého funkce (určuje rychlost změny funkce). Pro $T \neq 1$ jsou diference definovány vztahy (12.25a)

dopředná diference	zpětná diference	
$\Delta f(kT) = f[(k+1)T] - f(kT)$	$\nabla f(kT) = f(kT) - f[(k-1)T]$	(12.25a)

Druhá diference (dopředná i zpětná) je zavedena vztahem

$$\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) \quad \nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) \quad (12.26)$$

a je možno ji vyčíslit z funkčních hodnot

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(k) &= f(k+2) - f(k+1) - f(k+1) + f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) \\ \nabla^2 f(k) &= f(k) - f(k-1) - f(k-1) + f(k-2) = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2) \end{aligned}$$

Postupně můžeme zavést vyšší diference a vždy je možné je vyčíslit funkčními hodnotami (přitom platí, že řád diference je roven nejvyššímu posunutí u funkčních hodnot). Pro $T \neq 1$ by vztahy pro druhé diference vypadaly takto:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(kT) &= \Delta f[(k+1)T] - \Delta f(kT) = \{f[(k+2)T] - f[(k+1)T]\} - \{f[(k+1)T] - f(kT)\} = \\ &= f[(k+2)T] - 2f[(k+1)T] + f(kT) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(kT) = \nabla f(kT) - \nabla f[(k-1)T] = f(kT) - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T]$$

Pro obecné n a pro $T = 1$ i pro $T \neq 1$ je n -tá dopředná a zpětná diference definována následujícími vztahy:

$$\begin{aligned}\Delta^n f(k) &= \Delta^{n-1} f(k+1) - \Delta^{n-1} f(k) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(k+i) \\ \Delta^n f(kT) &= \Delta^{n-1} f[(k+1)T] - \Delta^{n-1} f(kT) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f[(k+i)T] \\ \nabla^n f(k) &= \nabla^{n-1} f(k) - \nabla^{n-1} f(k-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(k-i) \\ \nabla^n f(kT) &= \nabla^{n-1} f(kT) - \nabla^{n-1} f[(k-1)T] = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f[(k-i)T]\end{aligned}\tag{12.27}$$

Lineární diferenční rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou můžeme napsat v tzv. **diferenčním tvaru**

s dopřednými diferencemi

$$\alpha_n \Delta^n y(k) + \dots + \alpha_1 \Delta y(k) + \alpha_0 y(k) = \beta_m \Delta^m u(k) + \dots + \beta_1 \Delta u(k) + \beta_0 u(k)$$

se zpětnými diferencemi

$$\alpha_n \nabla^n y(k) + \dots + \alpha_1 \nabla y(k) + \alpha_0 y(k) = \beta_m \nabla^m u(k) + \dots + \beta_1 \nabla u(k) + \beta_0 u(k)$$

kde $u(k)$ je známá vstupní diskrétní funkce systému,

$y(k)$ je hledaná výstupní diskrétní funkce systému.

Jestliže v těchto diferenčních rovnicích nahradíme diference jejich funkčními hodnotami, dostaneme používaný **rekurentní tvar** diferenční rovnice

z dopředných diferencí

$$a_n y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)\tag{12.28}$$

ze zpětných diferencí

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)\tag{12.29}$$

Diferenční rovnice z dopředných diferencí (12.28) je uváděna jako **diferenční rovnice s kladnými posunutími**. Počáteční podmínky jsou zde dány funkčními hodnotami $y(0)$, $y(1)$, ... $y(n-1)$. Tento tvar je běžný v matematické literatuře, ale v technických disciplínách se užívá a je výhodnější druhý tvar (12.29) ze zpětných diferencí, který se nazývá tvar diferenční rovnice **se zápornými posunutími**. Počáteční podmínky jsou zde dány posloupností hodnot $y(-1)$, $y(-2)$, ... $y(-n)$ a tyto jsou většinou nulové.

Nutno zde zdůraznit, že koeficienty a_0 , a_1 , ... b_0 , b_1 , ... jsou numericky v rovnicích (12.28) a (12.29) odlišné, ale po formální stránce je značení právě takové, jak je uvedeno. Posunutí v závorce je shodné s indexem u obecného koeficientu.

Poznámka: V obecném tvaru pro $T \neq 1$ mají diferenční rovnice tvar

$$\begin{aligned}\alpha_n \Delta^n y(kT) + \dots + \alpha_1 \Delta y(kT) + \alpha_0 y(kT) &= \beta_m \Delta^m u(kT) + \dots + \beta_1 \Delta u(kT) + \beta_0 u(kT) \\ \alpha_n \nabla^n y(kT) + \dots + \alpha_1 \nabla y(kT) + \alpha_0 y(kT) &= \beta_m \nabla^m u(kT) + \dots + \beta_1 \nabla u(kT) + \beta_0 u(kT)\end{aligned}\tag{12.28a}$$

a odpovídající rekurentní tvar je

$$a_n y[(k+n)T] + \dots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = b_m u[(k+m)T] + \dots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT)$$

$$a_0 y(kT) + a_1 y[(k-1)T] + \dots + a_n y[(k-n)T] = b_0 u(kT) + b_1 u[(k-1)T] + \dots + b_m u[(k-m)T] \quad (12.29a)$$

Nyní si ukážeme, jak se diferenční rovnice řeší. Existují tři možné způsoby získání řešení. Běžné a v praxi používané je **numerické** někdy nazývané **rekurentní** řešení diferenčních rovnic. Další možností je řešit diferenční rovnice klasickým způsobem, podobně jako rovnice diferenciální (tento způsob si ukážeme jenom velmi zběžně). A konečně je možné řešit diferenční rovnice užitím Z-transformace (obdobně jako diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace).

- numerický (rekurentní) způsob

řešení je v *otevřeném tvaru*, hodnotu $y(kT)$ nelze určit bez znalosti předcházejících hodnot

- klasický způsob

řešení = řešení homogenní rovnice (z charakter. rovnice) + řešení partikulární části,

– k homogenní rovnici (pravá strana je rovna nule):

$$a_n y[(k+n)T] + a_{n-1} y[(k+n-1)T] + \dots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = 0$$

určíme příslušnou charakteristickou rovnici

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

a) jsou-li z_1, z_2, \dots, z_n její navzájem různé kořeny (reálné nebo komplexní), pak řešení homogenní rovnice je

$$y_{\text{hom}}(kT) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \dots + C_n z_n^k$$

b) je-li jeden kořen (např. z_1) p -násobný a ostatní jednoduché, je

$$y_{\text{hom}}(kT) = (C_1 + C_2 k + \dots + C_p k^{p-1}) z_1^k + C_{p+1} z_2^k + \dots + C_n z_{n-p+1}^k$$

c) pro větší počet násobných kořenů získáme tvar $y_{\text{hom}}(kT)$ zobecněním b)

[Konstanty C_1, C_2, \dots, C_n určíme z počátečních podmínek]

– výpočet partikulárního řešení je popsán např. v literatuře [Rektorys, 1981]

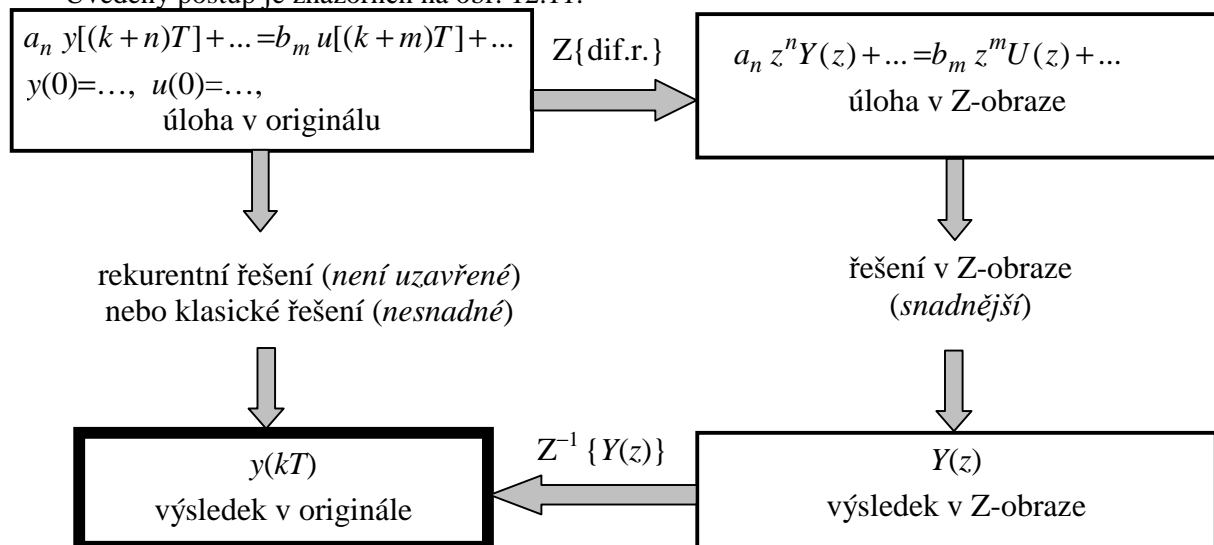
- pomocí Z-transformace

Diferenční rovnice

$$a_n y[(k+n)T] + \dots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = b_m u[(k+m)T] + \dots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT)$$

se Z-transformací převede na algebraickou rovnici, jejím řešením se najde Z-obraz řešení diferenční rovnice a použitím slovníku Z-transformace se dostáváme k řešení.

Uvedený postup je znázorněn na obr. 12.11.



Obr. 12.11

Příklad 12.10: Řešte numericky diferenční rovnici (kladná posunutí)

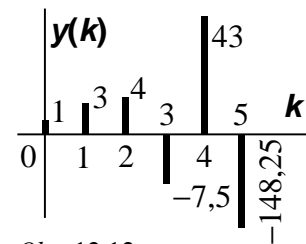
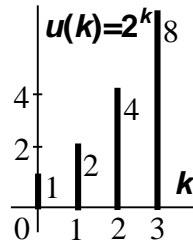
$$y(k+3)+4y(k+2)-0,5y(k+1)+3y(k)=6u(k+1)-2u(k)$$

Protože se jedná o diferenční rovnici třetího řádu, jsou zadané tři počáteční podmínky

$$y(0) = 1; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 4$$

a funkce na pravé straně rovnice (vstupní funkce)

$$u(k) = 2^k \text{ pro } k \geq 0 \text{ jinak } u(k) = 0 \text{ (obr. 12.12).}$$



Obr. 12.12

byla

Řešení: Rovnici upravíme tak, aby na levé straně hodnota výstupní funkce y s největším posunutím.

Řešení reprezentované posloupností hodnot $y(k)$ pak spočítáme postupným dosazováním $k = 0, 1, 2, \dots$ atd. pro libovolný počet hodnot.

$$y(k+3) = -4y(k+2) + 0,5y(k+1) - 3y(k) + 6u(k+1) - 2u(k)$$

$$\text{počáteční podmínky} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

$$k = 0: \quad y(3) = -4y(2) + 0,5y(1) - 3y(0) + 6u(1) - 2u(0) = -4 \cdot 4 + 0,5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -7,5$$

$$k = 1: \quad y(4) = -4y(3) + 0,5y(2) - 3y(1) + 6u(2) - 2u(1) = -4 \cdot (-7,5) + 0,5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 43$$

$$k = 2: \quad y(5) = -4y(4) + 0,5y(3) - 3y(2) + 6u(3) - 2u(2) = \\ = -4 \cdot 43 + 0,5 \cdot (-7,5) - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = -148,25$$

..... atd., graf řešení je na obr. 12.12.

Poznámka: Nevýhodou je, že řešení jsme dostali v otevřeném tvaru. Postup je však velmi snadno algoritimizovatelný a převoditelný do programu.

Příklad 12.11: Řešte numericky diferenční rovnici (záporná posunutí)

$$y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = 0,5u(k) - u(k-1)$$

pro vstupní funkci $u(k) = \sin k$ pro $k \geq 0$; $u(k) = 0$ pro $k < 0$ a pro nulové počáteční podmínky $y(-1) = y(-2) = 0$.

Řešení: Vyjádříme na levé straně rovnice člen s „nejmenším“ posunutím

$$y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) + 0,5u(k) - u(k-1)$$

a postupně dosazujeme $k = 0, 1, 2, \dots$ a dostáváme řešení diferenční rovnice

$$k = 0: \quad y(0) = 2y(-1) - y(-2) + 0,5u(0) - u(-1) = 2 \cdot 0 - 0 + 0,5 \cdot 0 = 0$$

$$k = 1: \quad y(1) = 2y(0) - y(-1) + 0,5u(1) - u(0) = 2 \cdot 0 - 0 + 0,5 \cdot 0,84 = 0,42$$

$$k = 2: \quad y(2) = 2y(1) - y(0) + 0,5u(2) - u(1) = 2 \cdot 0,42 - 0 + 0,5 \cdot 0,91 - 0,84 = 0,455$$

.....atd

Příklad 12.12: Řešte numericky diferenční rovnici (to je případ, kdy $T \neq 1$)

$$y(kT) - 3y[(k-1)T] + 2y[(k-2)T] + 5y[(k-3)T] = u(kT) - u[(k-1)T]$$

pro vstupní funkci $u(kT) = (kT)^2 + 4$ pro $k \geq 0$; $u(kT) = 0$ pro $k < 0$ a pro nulové počáteční podmínky $y(-T) = y(-2T) = y(-3T) = 0$.

Řešení: Vyjádříme na levé straně rovnice člen $y(kT)$

$$y(kT) = 3y[(k-1)T] - 2y[(k-2)T] - 5y[(k-3)T] + u(kT) - u[(k-1)T]$$

a postupně dosazujeme $k = 0, 1, 2, \dots$ a dostáváme řešení diferenční rovnice

$$k = 0: \quad y(0) = 3y(-T) - 2y(-2T) - 5y(-3T) + u(0) - u(-T) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 4 - 0 = 4$$

$$k = 1: \quad y(T) = 3y(0) - 2y(-T) - 5y(-2T) + u(T) - u(0) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + T^2 + 4 - 4 = T^2 + 12$$

$$k = 2: \quad y(2T) = 3y(T) - 2y(0) - 5y(-T) + u(2T) - u(T) = \\ = 3 \cdot (T^2 + 12) - 2 \cdot 4 - 5 \cdot 0 + 4T^2 + 4 - T^2 - 4 = 6T^2 + 28$$

$$k = 3: \quad y(3T) = 3y(2T) - 2y(T) - 5y(0) + u(3T) - u(2T) = \\ = 3 \cdot (6T^2 + 28) - 2(T^2 + 12) - 5 \cdot 4 + 9T^2 + 4 - 4T^2 - 4 = 21T^2 + 40$$

.... atd.

Příklad 12.12: Vyřešte diferenční rovnici

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 0,5y(k) = 0$$

pro počáteční podmínky $y(0) = 0$; $y(1) = 3$. Řešte klasickým způsobem jako se řeší diferenciální rovnice, abyste získali uzavřený tvar řešení.

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$z^2 + 3z + 0,5 = 0$$

a má kořeny $z_1 = -0,18$ a $z_2 = -2,82$. Protože diferenční rovnice má obecné řešení $y(k) = C_1(z_1)^k + C_2(z_2)^k$, kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty a z_1, z_2 kořeny charakteristické rovnice, můžeme řešení této rovnice napsat ve tvaru

$$y(k) = C_1(-0,18)^k + C_2(-2,82)^k$$

Integrační konstanty C_1, C_2 dostaneme z počátečních podmínek

$$y(0) = 0 = C_1 + C_2 \quad y(1) = 3 = -0,18C_1 - 2,82C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1,14; \quad C_2 = -1,14$$

a tím pádem je partikulární řešení

$$y(k) = 1,14 \left[(-0,18)^k - (-2,82)^k \right]$$

Zkontrolujme výsledek numerickým řešením

$$y(k+2) = -3y(k+1) - 0,5y(k)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{počáteční} \\ \text{podmínky} \end{array} \right\} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

k	$y(k)$
0	0
1	3
2	-9
3	25,5
4	-72
...	...

$$k = 0: \quad y(2) = -3y(1) - 0,5y(0) = -3 \cdot 3 - 0,5 \cdot 0 = -9$$

$$k = 1: \quad y(3) = -3y(2) - 0,5y(1) = -3 \cdot (-9) - 0,5 \cdot 3 = 25,5$$

$$k = 2: \quad y(4) = -3y(3) - 0,5y(2) = -3 \cdot 25,5 - 0,5 \cdot (-9) = -72 \quad \dots \text{ atd.}$$

Příklad 12.14: Použitím Z-transformace řešte diferenční rovnici

$$y(k+1) + 0,5y(k) = 0,5u(k+1) - u(k)$$

a to pro vstupní funkci $u(k) = e^{-k}$ pro $k \geq 0$, jinak $u(k) = 0$ a při počáteční podmínce $y(0) = 0,5$.

Řešení: Použitím Z-transformace celé rovnice dostáváme

$$Z\{y(k+1)\} + 0,5Y(z) = 0,5Z\{u(k+1)\} - U(z)$$

a využitím uvedené věty (12.19) o posunutí dostáváme

$$z[Y(z) - y(0)] + 0,5Y(z) = 0,5z[U(z) - u(0)] - U(z)$$

Z-obraz vstupní funkce u zjistíme ze slovníku Z-transformace

$$U(z) = Z\{e^{-k}\} = \frac{z}{z - e^{-1}}$$

a dosadíme včetně počátečních hodnoty do obrazu řešené rovnice a po úpravě dostaneme $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{0,5z - 1}{z + 0,5} \cdot \frac{z}{z - 0,368}$$

Originál k tomuto obrazu řešení získáme rozkladem na parciální zlomky a zpětnou transformací podle slovníku v tab. 12.2

$$y(k) = Z\left\{ \frac{1,44z}{z + 0,5} - \frac{0,94z}{z - 0,368} \right\} = 1,44 \cdot (-0,5)^k - 0,94 \cdot (0,368)^k$$

Z tohoto vztahu anebo dělením čitatele jmenovatelem získáme diskretní hodnoty řešení

$$y(0) = 0,5; \quad y(1) = -1,066; \quad y(2) = 0,233 \dots$$

12.3.2 Diskretizace spojitých systémů

Diskretizaci diferenciálních rovnic a spojitých systémů v technické praxi lze provádět mnoha různými způsoby [Švarc, 2007].

Je možno uvést náhradu přenosu $G(s)$ spojitého členu odpovídajícím přenosem $G(z)$. To se provádí tak, že se k spojitému členu o přenosu $G(s)$ určí jeho přechodová charakteristika. Tuto pak vzorkujeme, získáme diskretní funkci a k ní určíme přenos $G(z)$. Dalším způsobem diskretizace je diskretní aproximace derivace a integrace. Tato diskretizace se uplatňuje při diskretizaci funkčních členů regulačních obvodů jako jsou regulátory, filtry, korekční členy apod.

Diskretizaci lze také provádět ve stavovém prostoru – to je diskretizace stavových rovnic. A konečně nejpoužívanější způsoby diskretizace jsou přibližné metody, využívající různých aproximací derivace anebo integrálu. Sem patří náhrada derivací diferencemi a tedy převedení

Spojité funkce	Diskrétní funkce
<i>derivace prvního řádu</i>	<i>diference prvního řádu (zpětná)</i>
$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$	$\nabla x = x(k) - x(k - 1)$
<i>derivace druhého řádu</i>	<i>diference druhého řádu</i>
$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t - \Delta t)}{dt}}{\Delta t}$	$\nabla^2 x = \nabla x(k) - \nabla x(k - 1) =$ $= x(k) - 2x(k - 1) + x(k - 2)$
<i>derivace třetího řádu</i>	<i>diference třetího řádu</i>
$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \frac{d^2 x(t - \Delta t)}{dt^2}}{\Delta t}$	$\nabla^3 x = \nabla^2 x(k) - \nabla^2 x(k - 1) =$ $= x(k) - 3x(k - 1) + 3x(k - 2) - x(k - 3)$

Tab. 12.3

Derivace a diference

diferenciální rovnice na diferenční. Tato metoda je použitelná pro malé vzorkovací periody $T = \Delta t$. Podle této metody se v diferenciální rovnici systému nahradí derivace proměnných jejich diferencemi. Vztahy pro derivace u spojitých funkcí a diference pro diskrétní funkce jsou uvedeny v tab. 12.3 (diference jsou pro $T = \Delta t = 1$ s).

Abychom mohli diskretizovat diferenciální rovnici, použijeme náhrady, které vyplývají z tab.12.3

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\approx \frac{x(k) - x(k - 1)}{T} \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &\approx \frac{x(k) - 2x(k - 1) + x(k - 2)}{T^2} \\ \frac{d^3 x(t)}{dt^3} &\approx \frac{x(k) - 3x(k - 1) + 3x(k - 2) - x(k - 3)}{T^3} \end{aligned} \quad (12.30)$$

.....

kde T je vzorkovací perioda.

Proces **diskretizace** si ukažme na příkladu diferenciální rovnice 2. řádu:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (12.31)$$

Za derivace dosadíme podle (12.30) zpětné diference už vyjádřené funkčními hodnotami

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\nabla y(kT)}{T} = \frac{y(kT) - y[(k - 1)T]}{T} \\ y''(t) &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{\nabla^2 y(kT)}{T^2} = \frac{y(kT) - 2y[(k - 1)T] + y[(k - 2)T]}{T^2} \end{aligned}$$

a dostaneme rovnici

$$a_2 \frac{y(kT) - 2y[(k - 1)T] + y[(k - 2)T]}{T^2} + a_1 \frac{y(kT) - y[(k - 1)T]}{T} + a_0 y(kT) = b_1 \frac{u(kT) - u[(k - 1)T]}{T} + b_0 u(kT)$$

a po dosazení $T = 1$ [s] a po úpravě dostaneme diferenční rovnici

$$(a_2 + a_1 + a_0)y(k) - (2a_2 + a_1)y(k-1) + a_2y(k-2) = (b_1 + b_0)u(k) - b_1u(k-1) \quad (12.32)$$

Uvedeme si ještě jeden způsob diskretizace a to je náhrada operátoru s operátorem z . Jako jedna z možností přímého a přibližného přechodu ze spojitého systému o přenosu $G(s)$ na diskrétní o přenosu $G(z)$ je substituce

$$s \cong \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} \quad (12.33)$$

Snadno se přesvědčíme, že pomocí této substituce realizujeme přibližnou diskretizaci v obrazové oblasti se stejným výsledkem jako při použití náhrady derivací zpětnými diferencemi v časové oblasti. Budeme to demonstrovat opět příkladu diferenciální rovnice 2. řádu (12.31)

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_1u'(t) + b_0u(t)$$

Jí odpovídá přenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (12.34)$$

Po zavedení uvedené substituce dostaneme náhradu

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} + b_0}{a_2 \frac{1}{T^2} \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 + a_1 \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} + a_0}$$

a tento přenos po malé úpravě

$$G(z) = \frac{\left(\frac{b_1}{T} + b_0\right) - \frac{b_1}{T} z^{-1}}{\left(\frac{a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T} + a_0\right) - \left(2\frac{a_2}{T} + \frac{a_1}{T}\right)z^{-1} + \frac{a_2}{T^2} z^{-2}}$$

odpovídá pro $T=1$ [s] diferenční rovnici (12.32), kterou jsme získali předcházející diskretizací.

Dokonalejší způsob přibližné diskretizace v obrazovém vyjádření vychází z lichoběžníkové aproximace integrálu a nazývá se Tustinovou aproximací

$$s \cong \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (12.35)$$

kterou lze také získat rozvojem inverzního vztahu k výrazu $z = e^{sT}$ v řadu

$$s = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{(1-z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3} + \frac{(1-z^{-1})^5}{(1+z^{-1})^5} + \dots \right)$$

Odtud nalezneme

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{(1-z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3} + \frac{(1-z^{-1})^5}{(1+z^{-1})^5} + \dots}$$

Podělíme-li čitatele jmenovatelem, pak máme

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{3} \frac{(1-z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3} - \frac{4}{45} \frac{(1-z^{-1})^5}{(1+z^{-1})^5} + \dots \right)$$

Uvažujeme-li pouze první člen řady, dostáváme

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (12.36)$$

Nyní najdeme s^{-2}

$$s^{-2} = (s^{-1})^2 = \left(\frac{T}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{3} \frac{(1-z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3} - \dots \right)^2 = \frac{T^2}{4} \left(\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 - \dots \right)$$

Uvažujeme-li první dva členy, dostaneme

$$s^{-2} = \frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$$

Tímto způsobem získáme všechny výrazy v tab. 12.4, obsahující Z-transformace s^{-1} až s^{-5} .

Nyní můžeme uskutečnit přechod od přenosu v Laplaceově transformaci k z-přenosu, jestliže využijeme vztah $F(s) = F\left(\frac{1}{T} \ln z\right)$, neboť z definice proměnné $z = e^{sT}$ plyne

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (12.37)$$

Demonstrujme si tento způsob diskretizace opět na našem příkladu diferenciální rovnice (12.31). Jí odpovídající přenos v Laplaceových obrazech byl (12.34), upravme jej na přenos se zápornými exponenty

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{a_2 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} \quad (12.38)$$

a následně k němu sestavme Z-přenos s použitím tabulky tab. 12.4, kde položíme $T=1$ s

	Z - transformace
s^{-1}	$\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
s^{-2}	$\frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$

s^{-3}	$\frac{T^3}{2} \cdot \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} = \frac{T^3}{2} \cdot \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}$
s^{-4}	$\frac{T^4}{6} \cdot \frac{z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3}}{(1-z^{-1})^4} - \frac{T^4}{720} = \frac{T^4}{6} \cdot \frac{z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3}}{1-4z^{-1}+6z^{-2}-4z^{-3}+z^{-4}} - \frac{T^4}{720}$
s^{-5}	$\frac{T^5}{24} \cdot \frac{z^{-1} + 11z^{-2} + 11z^{-3} + z^{-4}}{(1-z^{-1})^5} - \frac{T^4}{720} = \frac{T^5}{24} \cdot \frac{z^{-1} + 11z^{-2} + 11z^{-3} + z^{-4}}{1-5z^{-1}+10z^{-2}-10z^{-3}+5z^{-4}-z^{-5}} - \frac{T^4}{720}$

Tab. 12.4

Přechod od Laplaceovy transformace k Z-transformaci

$$G(z) = \frac{1}{T} \frac{b_1 \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + b_0 \frac{T^2}{12} \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}}{a_2 + a_1 \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + a_0 \frac{T^2}{12} \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}} =$$

$$= \frac{(0,5b_1 + 0,083b_0) + 0,83b_0z^{-1} + (0,083b_0 - 0,5b_1)z^{-2}}{(a_2 + 0,5a_1 + 0,083b_0) + 0,83z^{-1} + (0,083b_0 - 0,5a_1)z^{-2}}$$

Tomuto přenosu odpovídá diferenční rovnice

$$(a_2 + 0,5a_1 + 0,083b_0)y(k) + 0,83b_0y(k-1) + (0,083b_0 - 0,5a_1)y(k-2) =$$

$$= (0,5b_1 + 0,083b_0)u(k) + 0,83b_0u(k-1) + (0,083b_0 - 0,5b_1)u(k-2)$$

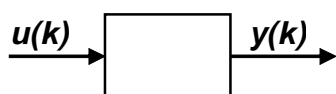
12.4 Matematický popis diskretních členů

Prakticky stejné matematické popisy jako známe u spojitých systémů jsou i u diskretních systémů, pouze místo diferenciálních rovnic používáme diferenční rovnice a místo Laplaceovy transformace používáme Z-transformaci. Seznámíme se s běžně užívanými popisy diskretních členů:

- diferenční rovnice
- Z-přenos
- impulsní funkce a charakteristika
- přechodová funkce a charakteristika
- frekvenční přenos
- frekvenční charakteristika

12.4.1 Diferenční rovnice a Z-přenos

Mějme diskretní systém s jednou vstupní veličinou $u(k)$ a jednou výstupní veličinou $y(k)$ podle obr. 12.12. Jak vstupní, tak výstupní veličina jsou diskretní časové funkce. Tento systém můžeme popsat diferenční rovnicí se zápornými posunutími



Obr. 4.13

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_mu(k-m) \quad (12.39)$$

anebo diferenční rovnicí s kladnými posunutími

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_0 u(k) \quad (12.40)$$

V regulační technice a v technické praxi vůbec se více používají diferenční rovnice se záporným posunutím. Koeficient a_0 u hodnoty $y(k)$ (u rovnic se zápornými posunutími (12.39)) bývá standardně normalizován na hodnotu 1, což umožňuje výhodně určit řešení $y(k)$ numerickým způsobem. K tomu stačí dělit celou rovnici koeficientem a_0 , pokud není jednotkou; při numerickém řešení pak je třeba neustálého dělení koeficientem a_0 .

Aby byl systém **fyzikálně realizovatelný**, musí u systémů, které jsou popsány rovnicemi s kladnými posunutími, platit vztah

$$n \geq m$$

tj. výstup systému nemůže reagovat na budoucí hodnoty vstupu. Kdyby např. pro $k = 10$ bylo $n = 2$ a $m = 5$, měli bychom na levé straně hodnoty $y(12)$, $y(11)$, $y(10)$, ale na pravé straně hodnoty $u(15)$, $u(14)$, ..., $u(10)$. Pak by se hodnota $y(12)$ počítala z budoucích hodnot vstupu $u(15)$, $u(14)$, ...

U systémů se zápornými posunutími musíme **podmínku fyzikální realizovatelnosti** vyjádřit jinak. Jestliže $a_0 \neq 1$, pak je-li

$$b_0 \neq 0, \quad \text{musí být také} \quad a_0 \neq 0.$$

Totéž musí platit i pro následující první nenulové si odpovídající koeficienty b_i a a_i . Tedy rovnice nesmí mít tvar např.: $y(k-1) + 3y(k-2) = u(k) + 5u(k-1) + 4u(k-2)$. Pak by se opět pro $k=10$ počítala hodnota $y(9)$ z budoucí hodnoty vstupu $u(10)$. Je-li ovšem $a_0 \neq 0$, je podmínka realizovatelnosti splněna automaticky.

Diferenční rovnice (12.39) nebo (12.40) diskrétního systému a obdobná diferenciální rovnice spojitého systému vykazují jistou analogii. Tato analogie však neznamená, že koeficienty diferenční rovnice jsou totožné s koeficienty diferenciální rovnice, přestože jsou stejně značeny. Jinými slovy řečeno ze spojitého systému neuděláme diskrétní verzi, když z diferenciální rovnice uděláme diferenční rovnici s ponecháním stejných koeficientů. Proces **diskretizace** byl objasněn v předcházející kapitole.

Tak jako u lineárních spojitých systémů vyjadřujeme popis pomocí operátorových přenosů Laplaceovy transformace, můžeme vlastnosti diskrétních systémů vyjádřit pomocí **Z-přenosu**, který je definovaný jako **poměr Z-obrazu výstupu a vstupu při nulových počátečních podmínkách**

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (12.41)$$

Z-přenos získáme z diferenční rovnice (12.39) tak, že ji celou transformujeme Z-transformací s využitím vět o posunutí (12.19) až (12.21), které pro nulové počáteční podmínky mají jednoduchý tvar

$$Z\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z); \quad Z\{f(k-2)\} = z^{-2}F(z); \quad \dots \quad Z\{f(k-n)\} = z^{-n}F(z);$$

takže rovnice je po transformaci

$$Y(z) + a_1 z^{-1}Y(z) + \dots + a_n z^{-n}Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1}U(z) + \dots + b_m z^{-m}U(z)$$

Vytkneme $Y(z)$, $U(z)$

$$Y(z) \left[1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \right] = U(z) \left[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \right]$$

a odtud je podle definice (12.41) Z-přenos

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (12.42)$$

Z-přenos $G(z)$ diskrétního systému sehrává stejnou úlohu jako přenos (Laplaceův) spojitého systému.

Poznámka: Z-přenos můžeme kdykoliv vynásobením čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou z převést na Z-přenos s kladnými exponenty.

Příklad 12.15: Diskrétní regulační člen je popsán diferenční rovnicí

$$y(k) - 5y(k-1) + 1,2y(k-2) = 3,5u(k) + 2u(k-1) - 4u(k-2)$$

Určete Z-přenos a převedte ho na přenos s kladnými exponenty.

Řešení:
$$G(z) = \frac{3,5 + 2z^{-1} - 4z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 1,2z^{-2}} \quad G(z) = \frac{3,5z^2 + 2z - 4}{z^2 - 5z + 1,2}$$

Podmínku fyzikální realizovatelnosti můžeme u Z-přenosu vyslovit stejně jako u diferenční rovnice se zápornými posunutími: jestliže $a_0 \neq 1$, pak je-li $b_0 \neq 0$, musí být $a_0 \neq 0$. Jednodušší ale je převést Z-přenos naznačeným způsobem na Z-přenos s kladnými exponenty a tam platí podmínka realizovatelnosti jednoznačně: Stupeň čitatele nesmí být větší, než je stupeň jmenovatele. (V příkladu 12.15 je regulační člen realizovatelný, neboť stupeň čitatele je roven stupni jmenovatele).

Za předpokladu nulových počátečních podmínek lze pomocí Z-přenosu určit Z-obraz výstupu $Y(z)$ pro daný vstupní signál $u(k)$ a jemu příslušný Z-obraz $U(z)$

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (12.43)$$

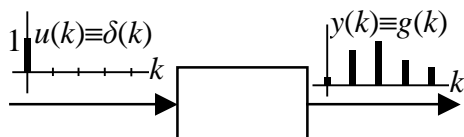
a zpětnou Z-transformací určit odezvu $y(k)$.

Při používání diferenční rovnice systému s kladnými posunutími (12.40) lze stejným způsobem jako u rovnice se zápornými posunutími odvodit vzorec pro Z-přenos

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (12.44)$$

12.4.2 Impulsní funkce a charakteristika

Diskrétní impulsní funkce je odezva systému na jednotkový impuls $\delta(k)$ na vstupu (obr. 12.14). Jednotkový impuls $\delta(k)$ byl již definován a znázorněn (trochu odlišně od definice pro spojité systémy) v příkladu 12.1



Obr. 12.14

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k \neq 0 \end{cases} \quad (12.45)$$

V operátorovém slovníku Z-transformace můžeme nalézt, že jeho Z-obraz je roven 1 neboli $Z\{\delta(k)\} = 1$. Graf impulsní funkce je impulsní charakteristika. Pro impulsní funkci je zavedeno označení $g(k)$.

Jelikož je Z-obraz jednotkového impulsu $Z\{\delta(k)\} = 1$ plyne z definice Z-přenosu

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{g(k)\}}{Z\{\delta(k)\}} = Z\{g(k)\} \quad (12.46)$$

kde jsme za vstupní funkci dosadili jednotkový impuls a za výstupní funkci impulsní funkci. Z toho vyplývá, že **Z-obraz impulsní funkce je roven právě Z-obrazu přenosu**. Tím pádem můžeme napsat, že

$$Z\{g(k)\} = G(z)$$

a tedy mezi impulsní funkcí a Z-přenosem je vztah mezi originálem a Z-obrazem. Impulsní funkci získáme ze Z-přenosu zpětnou Z-transformací

$$\boxed{g(k) = Z^{-1}\{G(z)\}} \quad (12.47)$$

Ze Z-přenosu můžeme také lehce získat počáteční hodnotu $g(0)$ impulsní funkce a to použitím věty (12.22) o počáteční hodnotě funkce v Z-transformaci

$$g(0) = \lim_{k \rightarrow 0} g(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = b_0 \quad (12.48)$$

Druhý způsob jak získat výpočtem impulsní funkci je z diferenční rovnice systému, kterou obecně uvažujeme ve tvaru (12.39)

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

Dosadíme-li za vstupní funkci $u(k)$ jednotkový impuls $\delta(k)$, bude výstupní funkce $y(k)$ právě impulsní funkcí $g(k)$

$$g(k) + a_1 g(k-1) + \dots + a_n g(k-n) = b_0 \delta(k) + b_1 \delta(k-1) + \dots + b_m \delta(k-m)$$

a stačí diferenční rovnici vyřešit, a tím impulsní funkci $g(k)$ určit. Řešíme tedy diferenční rovnici. Osamostatníme člen s největším posunutím na levé straně a dosazujeme postupně $k = 0, 1, 2, \dots$. Ujasníme si, že impulsní funkce začíná pro $k = 0$ a že tedy počáteční podmínky jsou nulové, tedy $g(-1) = g(-2) = \dots = 0$

$$g(k) = -a_1 g(k-1) - \dots - a_n g(k-n) + b_0 \delta(k) + b_1 \delta(k-1) + \dots + b_m \delta(k-m)$$

$$k = 0: g(0) = -a_1 g(-1) - \dots - a_n g(-n) + b_0 \delta(0) + b_1 \delta(-1) + \dots + b_m \delta(-m) = b_0 \quad (12.49)$$

$$k = 1: g(1) = -a_1 g(0) - \dots - a_n g(-n+1) + b_0 \delta(1) + b_1 \delta(0) + \dots + b_m \delta(-m+1) = b_1 - a_1 g(0)$$

$$k = 2: g(2) = -a_1 g(1) - \dots - a_n g(-n+2) + b_0 \delta(2) + b_1 \delta(1) + \dots + b_m \delta(-m+2) = b_2 - a_1 g(1) - a_2 g(0)$$

...atd., ale tento postup lépe uvidíme na konkrétním příkladu.

Příklad 12.16: Systém je popsán diferenční rovnicí

$$y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = 2u(k) - 7u(k-1)$$

Určete impulsní funkci všemi možnými způsoby a potom k ní načrtněte impulsní charakteristiku.

Řešení: Stanovíme Z-přenos a převedeme ho na tvar s kladnými exponenty

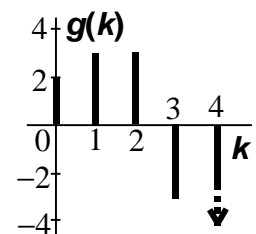
$$G(z) = \frac{2 - 7z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{2z^2 - 7z}{z^2 - 5z + 6}$$

Z $G(z)$ získáme $g(k)$ zpětnou transformací podle (12.47)

$$g(k) = Z^{-1}\{G(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z^2 - 7z}{z^2 - 5z + 6}\right\}$$

Zpětnou Z-transformaci můžeme provést buďto rozkladem v parciální zlomky a použitím operátorového slovníku anebo dělením polynomů čitatele a jmenovatele.

$$g(k) = Z^{-1}\{G(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z^2 - 7z}{z^2 - 5z + 6}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{3z}{z-2} - \frac{z}{z-3}\right\} = 3 \cdot 2^k - 3^k$$



k	0	1	2	3	4
$g(k)$	2	3	3	-3	-3

Obr. 12.15

a tento výsledek platí podle operátorového slovníku v tab. 12.2 pro $k \geq 0$. Vypočítáme několik prvních hodnot této funkce a porovnáme je s následujícím dělením polynomů čitatele a jmenovatele a s následujícím řešením diferenční rovnice.

$$\begin{array}{r} (2z^2 - 7z) : (z^2 - 5z + 6) = 2 + 3z^{-1} + 3z^{-2} - 3z^{-3} - 33z^{-4} + \dots \\ -(2z^2 - 10z + 12) \\ \hline 0 + 3z - 12 \\ -(3z - 15 + 18z^{-1}) \\ \hline 0 + 3 - 18z^{-1} \\ -(3 - 15z^{-1} + 18z^{-2}) \\ \hline 0 - 3z^{-1} - 18z^{-2} \\ -(-3z^{-1} + 15z^{-2} - 18z^{-3}) \\ \hline 0 - 33z^{-2} + 18z^{-3} \end{array}$$

$$g(k) - 5g(k-1) + 6g(k-2) = 2\delta(k) - 7\delta(k-1)$$

$$g(k) = 5g(k-1) - 6g(k-2) + 2\delta(k) - 7\delta(k-1)$$

$$k=0: g(0) = 5g(-1) - 6g(-2) + 2\delta(0) - 7\delta(-1) = 2$$

$$k=1: g(1) = 5g(0) - 6g(-1) + 2\delta(1) - 7\delta(0) = 3$$

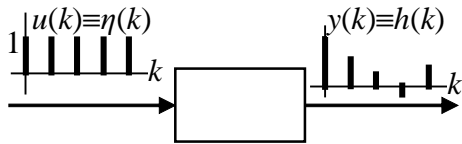
$$k=2: g(2) = 5g(1) - 6g(0) + 2\delta(2) - 7\delta(1) = 3$$

$$k=3: g(3) = 5g(2) - 6g(1) + 2\delta(3) - 7\delta(2) = -3$$

$$k=4: g(4) = 5g(3) - 6g(2) + 2\delta(4) - 7\delta(3) = -33$$

atd., impulsní funkce je na obr. 12.15.

12.4.3 Přejchodová funkce a charakteristika



Obr. 4.16

Diskrétní přechodová funkce je odezva systému na jednotkový skok $\eta(k)$ na vstupu (obr. 12.16). Jednotkový skok $\eta(k)$ byl již definován a znázorněn v příkladu 12.1

$$\eta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k \geq 0 \\ 0 & \text{pro } k < 0 \end{cases} \quad (12.50)$$

V operátorovém slovníku Z-transformace můžeme

nalézt, že jeho Z-obraz je $Z\{\eta(k)\} = \frac{z}{z-1}$. Graf přechodové

funkce je přechodová charakteristika. Pro přechodovou funkci je zavedeno označení $h(k)$.

Dosažením do definice Z-přenosu dostaneme

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{h(k)\}}{Z\{\eta(k)\}} = \frac{Z\{h(k)\}}{\frac{z}{z-1}} \quad (12.51)$$

když jsme za vstupní funkci dosadili jednotkový skok, pak výstupní funkci nazýváme přechodová funkce. Ze vztahu

$$Z\{h(k)\} = \frac{z}{z-1} G(z) \quad \text{neboli} \quad H(z) = \frac{z}{z-1} G(z) \quad (12.52)$$

dostaneme vztah pro získání přechodové funkce ze Z-přenosu

$$\boxed{h(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} G(z) \right\}} \quad (12.53)$$

Ze Z-přenosu můžeme také lehce získat počáteční hodnotu $h(0)$ přechodové funkce a to použitím věty (12.22) o počáteční hodnotě funkce v Z-transformaci

$$h(0) = \lim_{k \rightarrow 0} h(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = b_0 \quad (12.54)$$

a konečnou hodnotu $h(\infty)$ přechodové funkce použitím věty (12.22) o konečné hodnotě funkce a vztahu (12.52)

$$h(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} H(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + \dots} = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots}{1 + a_1 + a_2 + \dots} \quad (12.55)$$

Druhý způsob, jak získat přechodovou funkci, je počítat ji z diferenční rovnice systému, kterou obecně uvažujeme ve tvaru (12.39)

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

Dosadíme-li za vstupní funkci $u(k)$ jednotkový skok $\eta(k)$, bude výstupní funkce $y(t)$ právě přechodová funkce $h(k)$

$$h(k) + a_1 h(k-1) + \dots + a_n h(k-n) = b_0 \eta(k) + b_1 \eta(k-1) + \dots + b_m \eta(k-m)$$

a stačí diferenční rovnici vyřešit, a tím přechodovou funkci $h(k)$ určit. Řešíme tedy diferenční rovnici. Osamostatníme člen s největším posunutím na levé straně a dosazujeme postupně $k = 0, 1, 2, \dots$. Ujasníme si, že přechodová funkce začíná pro $k = 0$, a tedy počáteční podmínky jsou nulové, tj. $h(-1) = h(-2) = \dots = 0$

$$h(k) = -a_1 h(k-1) - \dots - a_n h(k-n) + b_0 \eta(k) + b_1 \eta(k-1) + \dots + b_m \eta(k-m) \quad (12.56)$$

$$k=0: h(0) = -a_1 h(-1) - \dots - a_n h(-n) + b_0 \eta(0) + b_1 \eta(-1) + \dots + b_m \eta(-m) = b_0$$

$$k=1: h(1) = -a_1 h(0) - \dots - a_n h(-n+1) + b_0 \eta(1) + b_1 \eta(0) + \dots + b_m \eta(-m+1) = b_0 + b_1 - a_1 h(0)$$

$$k=2: h(2) = -a_1 h(1) - \dots - a_n h(-n+2) + b_0 \eta(2) + b_1 \eta(1) + \dots + b_m \eta(-m+2) = b_0 + b_1 + b_2 - a_1 h(1) - a_2 h(0)$$

...atd., to bude objasněno na konkrétním příkladu.

Jaký je **vztah mezi přechodovou funkcí a impulsní funkcí**? Můžeme získat přechodovou funkci z impulsní a naopak impulsní funkci z přechodové funkce?

Z předcházejících rovnic (12.56) vypočítáme rozdíly Δh a dosazujeme do nich ze soustavy rovnic (12.49) a rovnice (12.48)

$$h(1) - h(0) = b_1 - a_1 h(0) = b_1 - a_1 g(0) = g(1)$$

$$h(2) - h(1) = b_2 - a_1 [h(1) - h(0)] - a_2 h(0) = b_2 - a_1 g(1) - a_2 g(0) = g(2) \quad \dots \text{atd.}$$

obecně:

$$h(k) - h(k-1) = g(k) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(k) = h(k) - h(k-1)} \quad (12.57)$$

Vztah (12.57) říká, jak získat impulsní funkce, když známe přechodovou funkci. Nyní tento vztah rozepíšeme

$$g(k) = h(k) - h(k-1)$$

$$g(k-1) = h(k-1) - h(k-2)$$

$$g(k-2) = h(k-2) - h(k-3)$$

.....

$$g(1) = h(1) - h(0)$$

$$g(0) = h(0)$$

A sečtením těchto rovnic dostaneme výsledný vztah mezi impulsní a přechodovou funkcí, tentokrát pro výpočet přechodové funkce z funkce impulsní

$$\sum_{i=0}^k g(i) = h(k) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h(k) = \sum_{i=0}^k g(i)} \quad (12.58)$$

Ke vztahům mezi impulsní a přechodovou funkcí (12.57) a (12.58) se můžeme také dostat jednoduchou úvahou o analogii mezi spojitými a diskrétními funkcemi. U spojitých systémů platily pro získání impulsní z přechodové funkce a naopak vztahy (3.36) a (3.37)

$$\begin{array}{ll} h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau & g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ h(k) = \sum_{i=0}^k g(i) & g(k) = h(k) - h(k-1) \end{array}$$

U diskretních systémů nahradíme integrál sumou a derivaci zpětnou diferencí a dostaneme vztahy (12.57) a (12.58) touto jednoduchou analogií.

Podobně jako spojité systémy či regulační členy dělíme i diskretní systémy podle ustálené hodnoty $h(\infty)$ přechodové charakteristiky na proporcionální, diferenční a sumační. Ustálená hodnota $h(\infty)$ přechodové charakteristiky je dána vztahem (12.55).

proporcionální	$h(\infty) \neq 0$	$\sum a_i \neq 0; \sum b_i \neq 0$
diferenční	$h(\infty) = 0$	$\sum a_i \neq 0; \sum b_i = 0$
sumační	$h(\infty) = \infty$	$\sum a_i = 0; \sum b_i \neq 0$

Příklad 12.17: Systém je popsán diferenční rovnicí

$$y(k) + 0,5 y(k-1) = u(k) + 2 u(k-1)$$

Určete přechodovou funkci všemi možnými způsoby a načrtněte přechodovou charakteristiku. Současně určete impulsní funkci a spočítejte přechodovou funkci z impulsní a naopak.

Řešení : Určíme Z-přenos včetně jeho tvaru s kladnými exponenty

$$G(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}} = \frac{z + 2}{z + 0,5}$$

Ze Z-přenosu získáme přechodovou funkci podle vztahu (12.53); použijeme tab. 12.2

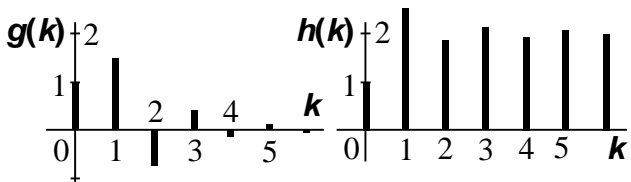
$$h(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z+2}{z+0,5} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z+0,5} \right\} = 2 - (-0,5)^k \quad \text{pro } k \geq 0$$

Podobně podle vztahu (12.47) a tab. 12.2 určíme impulsní funkci

$$g(k) = Z^{-1} \{G(z)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z+2}{z+0,5} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+0,5} + \frac{2}{z+0,5} \right\} = \begin{cases} (-0,5)^0 + 0 = 1 & \text{pro } k = 0 \\ (-0,5)^k + 2(-0,5)^{k-1} & \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

Druhá možnost provedení zpětné Z-transformace jak u přechodové, tak u impulsní funkce je dělení polynomu čitatele polynomem jmenovatele

$$\begin{array}{r} (z^2 + 2z) : (z^2 - 0,5z - 0,5) = 1 + 2,5z^{-1} + 1,75z^{-2} + 2,125z^{-3} + \dots \\ \underline{-(z^2 - 0,5z - 0,5)} \qquad \qquad \qquad h(0) \quad h(1) \quad h(2) \quad h(3) \\ 0 + 2,5z + 0,5 \qquad \qquad \qquad (z+2) : (z+0,5) = 1 + 1,5z^{-1} - 0,75z^{-2} + 0,375z^{-3} - \dots \\ \underline{-(2,5z - 1,25 - 1,25z^{-1})} \qquad \qquad \qquad \underline{-(z+0,5)} \qquad \qquad \qquad g(0) \quad g(1) \quad g(2) \quad g(3) \\ 0 \quad +1,75 + 1,25z^{-1} \qquad \qquad \qquad 0 + 1,5 \\ \underline{-(1,75 - 0,875z^{-1} - 0,875z^{-2})} \qquad \qquad \qquad \underline{-(1,5 + 0,75z^{-1})} \\ 0 \quad +2,125z^{-1} + 0,875z^{-2} \qquad \qquad \qquad 0 \quad -0,75z^{-1} \\ \dots \qquad \qquad \qquad \underline{-(-0,75z^{-1} - 0,375z^{-2})} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \quad +0,375z^{-2} \end{array}$$



k	g(k)	h(k)
0	1	1
1	1,5	2,5
2	-0,75	1,75
3	0,375	2,125
4	-0,187	1,938
5	0,156	2,031
6	-0,047	1,984
·

Obr. 12.17

Třetí metoda pro získání jak impulsní, tak přechodové funkce je řešení diferenční rovnice, kde za vstupní funkci dosadíme buď $\delta(k)$ anebo $\eta(k)$.

$$g(k) = \delta(k) + 2\delta(k-1) - 0,5g(k-1) \qquad h(k) = \eta(k) + 2\eta(k-1) - 0,5h(k-1)$$

$$k = 0: \quad g(0) = \delta(0) + 2\delta(-1) - 0,5g(-1) = 1 \qquad h(0) = \eta(0) + 2\eta(-1) - 0,5h(-1) = 1$$

$$k = 1: \quad g(1) = \delta(1) + 2\delta(0) - 0,5g(0) = 1,5 \qquad h(1) = \eta(1) + 2\eta(0) - 0,5h(0) = 2,5$$

$$k = 2: \quad g(2) = \delta(2) + 2\delta(1) - 0,5g(1) = -0,75 \qquad h(2) = \eta(2) + 2\eta(1) - 0,5h(1) = 1,75$$

$$k = 3: \quad g(3) = \delta(3) + 2\delta(2) - 0,5g(2) = 0,375 \qquad h(3) = \eta(3) + 2\eta(2) - 0,5h(2) = 2,125$$

Nyní si ještě na tomto příkladu ověříme získávání impulsní funkce z přechodové a naopak, protože obě dvě známe numericky. Graficky je průběh obou charakteristik na obr. 12.17.

$$h(k) = \sum_{i=0}^k g(i) \qquad g(k) = h(k) - h(k-1)$$

$$g(0) = h(0) = 1 \qquad h(0) = g(0) = 1$$

$$g(1) = h(1) - h(0) = 2,5 - 1 = 1,5 \qquad h(1) = g(0) + g(1) = 1 + 1,5 = 2,5$$

$$g(2) = h(2) - h(1) = 1,75 - 2,5 = -0,75 \qquad h(2) = g(0) + g(1) + g(2) = 1 + 1,5 - 0,75 = 1,75$$

$$g(3) = h(3) - h(2) = 2,125 - 1,75 = 0,375 \qquad h(3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 1 + 1,5 - 0,75 + 0,375 = 2,125$$

Ustálená hodnota $h(\infty)$ přechodové charakteristiky je podle (12.55)

$$h(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} H(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1+2z^{-1}}{1+0,5z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+2}{z+0,5} = \frac{1+2}{1+0,5} = 2$$

a proto se jedná o proporcionální diskrétní člen.

12.4.4 Frekvenční přenos a frekvenční charakteristika

Uvažujme lineární diskrétní systém, jehož Z-přenos má tvar s kladnými mocninami z

$$G(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \qquad (12.59)$$

Frekvenční přenos diskrétního systému [Švarc, 2007] je definován vztahem

$$G(j\omega T) = \frac{Y(j\omega T)}{U(j\omega T)} \qquad (12.60)$$

což je buď podíl symbolického vyjádření výstupní harmonické a vstupní harmonické funkce anebo podíl Fourierova obrazu výstupní a Fourierova obrazu vstupní funkce. Tento frekvenční přenos je komplexní funkce bezrozměrné frekvence ωT . Získáme ho ze Z-přenosu $G(z)$ dosazením

$$z = e^{j\omega T} \qquad (12.61)$$

tedy

$$\boxed{G(j\omega T) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}} \qquad (12.62)$$

Frekvenční přenos diskrétního systému je (na rozdíl od frekvenčního přenosu spojitého systému) periodická funkce frekvence ωT s periodou 2π

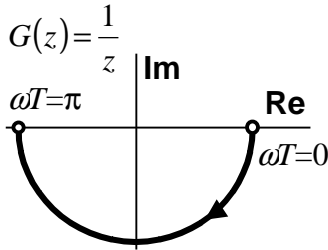
$$G(j\omega T) = G[(j(\omega T + 2k\pi))] \qquad (12.63)$$

Frekvenční charakteristika diskrétního systému v komplexní rovině je grafické znázornění frekvenčního přenosu $G(j\omega T)$ v závislosti na bezrozměrné frekvenci ωT , kterou měníme obecně od 0 do 2π (dále by se její

průběh opakovat, neboť je to periodická funkce) a znázorňujeme v komplexní rovině. Snadno zjistíme, že frekvenční charakteristika je souměrná podle reálné osy (úsek od 0 do π je symetrický s úsekem od π do 2π atd.). Vzhledem k této souměrnosti a k periodičnosti $G(j\omega T)$ ji stačí znázorňovat a počítat v rozsahu

$$0 \leq \omega T \leq \pi \quad (12.64)$$

Příklad 12.18: Sestrojte frekvenční charakteristiku odpovídající přenosům



Obr. 12.18

$$G(z) = \frac{1}{z}; \quad \frac{1}{z^2}; \quad \frac{1}{z^3}; \dots$$

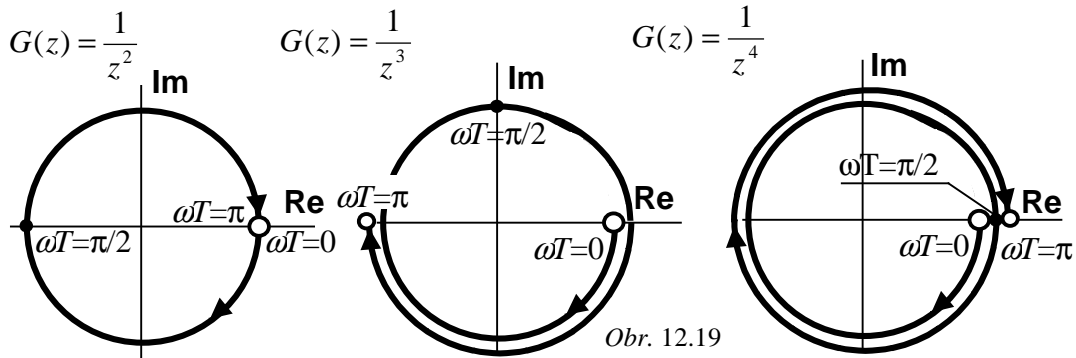
Řešení: Pro přenos $G(z) = \frac{1}{z}$ je

$$G(j\omega T) = e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \sin \omega T$$

To je samozřejmě rovnice jednotkové kružnice se středem v počátku. Protože pro $\omega T=0$ je $G(j\omega T)=1$ a pro $\omega T=\pi$ je $G(j\omega T)=-1$, je to spodní polovina této kružnice, viz obr. 12.18.

Pro $G(z) = \frac{1}{z^2}$ je $G(j\omega T) = e^{-2j\omega T} = \cos 2\omega T - j \sin 2\omega T$

To je opět rovnice jednotkové kružnice se středem v počátku. Protože pro $\omega T=0$ je $G(j\omega T)=1$ a pro $\omega T=\pi$



Obr. 12.19

je znovu $G(j\omega T)=1$, je to jednotková kružnice právě jednou oběhnutá.

$$G(z) = \frac{1}{z^3}: \quad G(j\omega T) = e^{-3j\omega T} = \cos 3\omega T - j \sin 3\omega T.$$

Rovnice jednotkové kružnice se středem v počátku. Protože pro $\omega T=0$ je $G(j\omega T)=1$ a pro $\omega T=\pi$ je $G(j\omega T)=-1$, je to jednou a půl-krát oběhnutá kružnice. Pro $\frac{1}{z^4}$ je kružnice obíhaná dvakrát atd. Je to znázorněno na obr. 12.19.

Příklad 12.19: Sestrojte frekvenční charakteristiku odpovídající přenosu $G(z) = \frac{1}{z-a}$.

Řešení: Odpovídající $G(j\omega T)$ je

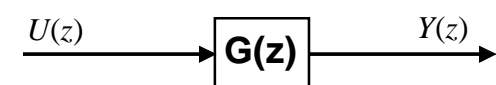
$$G(j\omega T) = \frac{1}{e^{j\omega T} - a} = \frac{1}{\cos \omega T + j \sin \omega T - a} = \frac{\cos \omega T - a}{(\cos \omega T - a)^2 + \sin^2 \omega T} - j \frac{\sin \omega T}{(\cos \omega T - a)^2 + \sin^2 \omega T}$$

Frekvenční charakteristikou je opět půlkružnice, ale už nemá střed v počátku souřadnicového systému. Její poloha je dána jejím začátkem a koncem a z těchto dvou bodů vyjde i poloha středu.

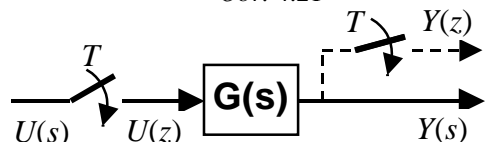
Krajní body této frekvenční charakteristiky jsou $G(j\omega T)_{\omega T=0} = \frac{1}{1-a}$ a $G(j\omega T)_{\omega T=\pi} = \frac{1}{-1-a}$ a charakteristika je spodní polovina kružnice o středu $S\left[\frac{a}{1-a^2}; 0\right]$ a poloměru $r = \frac{1}{1-a^2}$, viz obr. 12.20.

12.4.5 Bloková algebra

Pravidla blokové algebry jsme si vysvětlili u spojitého systému. Tato pravidla budou platit i u systémů diskrétních. U sériového zapojení členů bude výsledný přenos dán součinem dílčích přenosů, u paralelního zapojení bude dán součtem dílčích přenosů a u zpětnovazebního (antiparalelního) zapojení zlomkem, kde v čitateli bude součin přenosů v přímé větvi a ve jmenovateli jedna plus (u záporné zpětné vazby) součin všech členů v přímé větvi a zpětné vazbě. Ale navíc jsou u diskrétních systémů různě zapojené vzorkovače. A v tom je něco nového oproti spojitým systémům. V podstatě se to bude týkat pouze sériového zapojení, na paralelní a antiparalelní zapojení to už bude pouhá aplikace. Takže mluvíme o sériovém zapojení diskrétních systémů s různě umístěnými vzorkovači.



Obr. 4.21



Obr. 12.22

Z-přenos diskrétního členu. Pro diskrétní člen na obr. 12.21 platí podle definice Z-přenosu (12.41) vztah

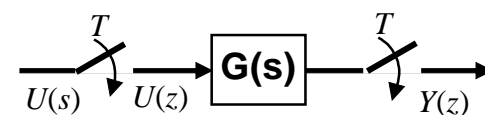
$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (12.65)$$

Z-přenos spojitěho členu. Táž rovnice bude platit i pro spojitý člen na obr. 12.22 se vzorkovačem na vstupu. Spokojme se s určením výstupní funkce $y(t)$ v okamžicích vzorkování k respektive kT . Samozřejmě že výstupní funkce spojitěho členu je spojitá anebo po částech spojitá funkce, vzpomeňme si na definici impulsní funkce spojitěho členu. Ale protože nemůžeme tvořit Z-obraz spojitě funkce, zařadíme na výstup tohoto spojitěho členu fiktivní vzorkovač,

synchronizovaný se vstupním vzorkovačem. Výstup z tohoto vzorkovače je $y(k)$ respektive $y(kT)$ a určení této funkce je vlastně určení hodnot spojitě funkce $y(t)$ v okamžicích vzorkování. Pro toto zapojení se dá odvodit, že Z-obraz výstupní veličiny je dán opět vztahem (12.65)

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

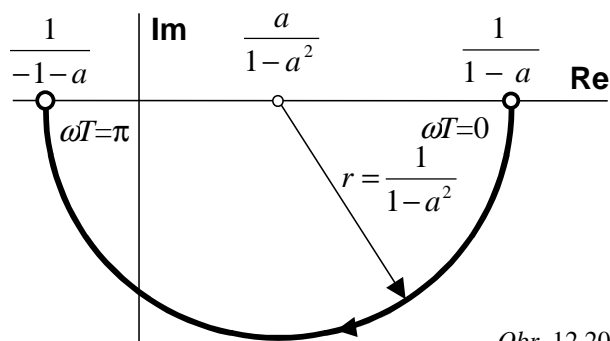
Zde je samozřejmě $G(z) = Z\{V\{L^{-1}\{G(s)\}\}\}$ podle (12.9), kde $V\{\}$ je operace vzorkování.



Obr. 4.23

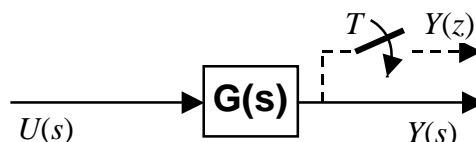
Prakticky to znamená, že pomocí Z-transformace určujeme hodnoty spojitě výstupní veličiny $y(t)$ v diskrétních časových okamžicích. Fiktivní vzorkovač u spojitě výstupní funkce někdy kreslíme a jindy toto kreslení vypouštíme. Vždy ale při určování Z-obrazu spojitě funkce předpokládáme existenci takového fiktivního vzorkovače.

Vzorkovač na výstupu. Stejný Z-obraz výstupní veličiny $y(k)$ bude mít i zapojení podle obr. 12.23, kde je přidán vzorkovač na výstupu. Z-obraz výstupní veličiny je opět dán vztahem (12.65)



Obr. 12.20

$$Y(z) = G(z)U(z)$$



Obr. 12.24

S
pojitý člen bez vzorkovačů

Jinak

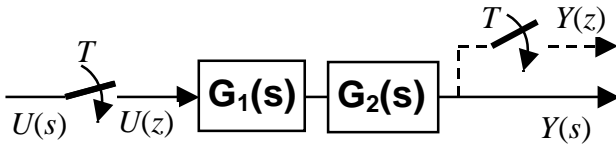
je tomu ale v případě, že na vstupu není vzorkovač – obr. 12.24. Fiktivní vzorkovač na výstupu umožňuje existenci Z- obrazu výstupu $Y(z)$, ale čemu se rovná $Y(z)$? Protože se zde jedná o spojitý člen, platí v Laplaceově transformaci vztah pro odezvu (3.28)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Z-obraz výstupní veličiny pak je

$$Y(z) = Z\{G(s)U(s)\} = GU(z) \quad (12.66)$$

Zde samozřejmě opět rozumíme $Z\{G(s)U(s)\} = Z\{V[L^{-1}\{G(s)U(s)\}]\}$. Ale hlavně si všimněme symbolického zápisu $GU(z)$, kde závorka „(z)“ za oběma velkými písmeny značícími obrazy je **konvence, že obě veličiny vynásobíme nejdříve v Laplaceových obrazech** (jedná se o sériové zapojení) a pak k tomuto součinu stanovíme Z-obraz.



Obr. 12.25

Dva spojitě členy v sérii. Proto máme-li zapojení podle obr. 12.25, bude Z-obraz výstupní veličiny

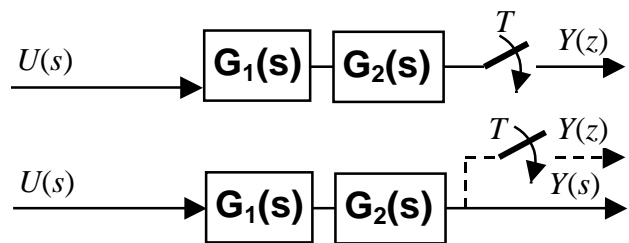
$$Y(z) = G_1G_2(z)U(z), \quad (12.67)$$

protože když určíme $G(s) = G_1(s)G_2(s)$, je to stejné zapojení jako na obr. 12.22.

Dva spojitě členy v sérii – bez vzorkovače na vstupu. Uvažujeme-li ovšem jedno ze dvou zapojení na obr. 12.26, je Z-obraz výstupu

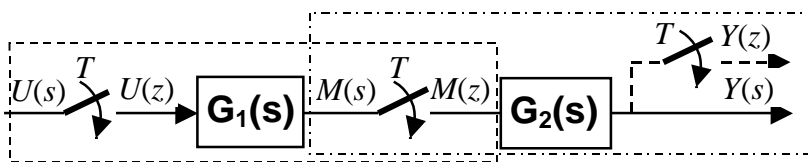
$$Y(z) = G_1G_2U(z) \quad (12.68)$$

protože toto zapojení odpovídá zapojení na obr. 12.24, kde je opět $G(s) = G_1(s)G_2(s)$.



Obr. 12.26

Spojitě členy v sérii – vzorkovač uprostřed. Konečně si všimněme důležitého zapojení na obr. 12.27. Zapojení je v podstatě sériové zapojení dvou členů (čárkovaně orámovaných), které oba odpovídají zapojení podle obr. 12.22.



Obr. 12.27

označíme-li si obraz signálu na výstupu z $G_1(s)$ jako $M(s)$, pak to bude pomocná veličina, kterou pak vyliminujeme a můžeme psát

$$Y(z) = G_2(z)M(z)$$

$$M(z) = G_1(z)U(z)$$

a po dosazení dostáváme

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)U(z) \quad (12.69)$$

Ještě je důležité si připomenout, že konvence $AB(z)$ znamená násobení veličin $A(s)$, $B(s)$ v L-obrazech a k jejich součinu $A(s)B(s)$ se teprve stanoví Z-obraz. Naopak výraz $A(z)B(z)$ znamená, že k $A(s)$ stanovíme Z-obraz $A(z)$, k $B(s)$ stanovíme Z-obraz $B(z)$ a tyto Z-obrazy vynásobíme a dostaneme součin $A(z)B(z)$. Výsledek je u obou případů odlišný.

Pokud budeme respektovat uvedená pravidla, která se týkají v hlavní míře řazení vzorkovačů, můžeme počítat výsledný přenos i pro složitější zapojení. Sériové zapojení zůstává sériovým, i když se bude jednat o diskrétní členy či obvody, a výsledný přenos je dán součinem dílčích přenosů. A totéž platí i pro paralelní zapojení a zpětnovazební (antiparalelní) zapojení.

Nyní si spočítáme přenos tří diskrétních obvodů, které budeme v dalším používat.

Příklad 12.20: Spočítejte přenos řízení diskrétních regulačních obvodů na obr. 12.28a, b, c.

Řešení: Pro součtový respektive rozdílový uzel obvodů platí rovnice

pro první dva obvody
 $e(t) = w(t) - y(t)$

pro třetí obvod
 $e(k) = w(k) - y(k)$

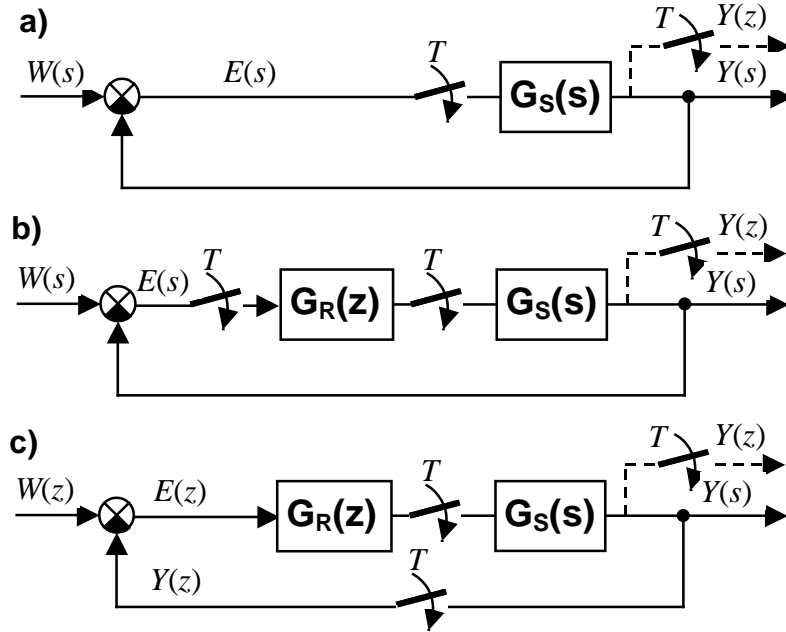
Protože platí věta (12.18) o linearitě v Z-transformaci, je možno tuto rovnici psát v Z-obrazech

$$E(z) = W(z) - Y(z)$$

V přímé větvi obvodu na obr. 12.28a je zapojení podle obr. 12.22, pro které platí vztah (12.65), tedy

$$Y(z) = G_S(z)E(z)$$

Po dosazení



Obr. 12.28

$$Y(z) = G_S(z)[W(z) - Y(z)] = G_S(z)W(z) - G_S(z)Y(z)$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit buď obraz výstupní regulované veličiny

$$Y(z) = \frac{G_S(z)}{1 + G_S(z)}W(z)$$

anebo přenos řízení

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_S(z)}{1 + G_S(z)}$$

V přímé větvi obvodu na obr. 12.28b je zapojení podle obr. 12.27, pro které platí vztah (12.69), tedy

$$Y(z) = G_R(z)G_S(z)E(z)$$

Po dosazení za $E(z)$ z transformované rovnice rozdílového uzlu je

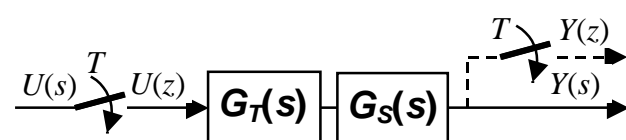
$$Y(z) = G_R(z)G_S(z)[W(z) - Y(z)] = G_R(z)G_S(z)W(z) - G_R(z)G_S(z)Y(z)$$

a z této rovnice opět můžeme vyjádřit obraz výstupní regulované veličiny nebo přenos řízení

$$Y(z) = \frac{G_R(z)G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)}W(z) \quad G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_R(z)G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)} \quad (12.70)$$

Pro obvod na obr. 12.28c je celý postup obdobný a platí pro něj stejné rovnice jako v příkladu 12.28b.

Příklad 12.21: Určete přenos zapojení vzorkovač – tvarovač – spojitá soustava podle obr. 12.29.



Obr. 12.29

Řešení: Jedná se o zapojení podle obr. 12.25 a odezva v Z-obrazce je dána vztahem (12.67)
 $Y(z) = G_T G_S(z)U(z)$

Uvažujeme-li tvarovač nultého řádu, jehož přenos

$$\text{je podle (12.5) } G_T(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}, \text{ bude celkový}$$

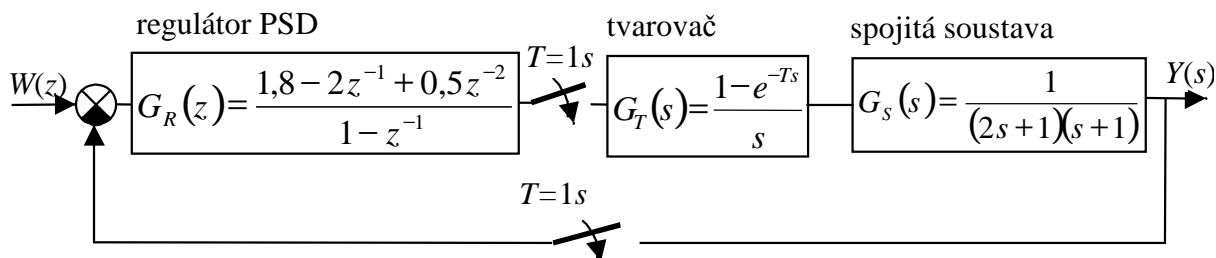
přenos zapojení

$$G_C(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = G_T G_S(z) = Z\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_S(s)\right\} = Z\left\{\frac{G_S(s)}{s}\right\} - Z\left\{e^{-Ts} \frac{G_S(s)}{s}\right\}$$

V Laplaceově transformaci znamená násobení obrazu výrazem e^{-Ts} posunutí originálu o $-T$. To podle věty o posunutí v Z-transformaci (12.19) znamená v Z-obrazce násobení výrazem z^{-1}

$$G_C(z) = Z\left\{\frac{G_S(s)}{s}\right\} - z^{-1} Z\left\{\frac{G_S(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_S(s)}{s}\right\} \quad (12.71)$$

Příklad 12.22: Stanovte přenos řízení diskrétního obvodu podle obr. 12.30.



Obr. 12.30

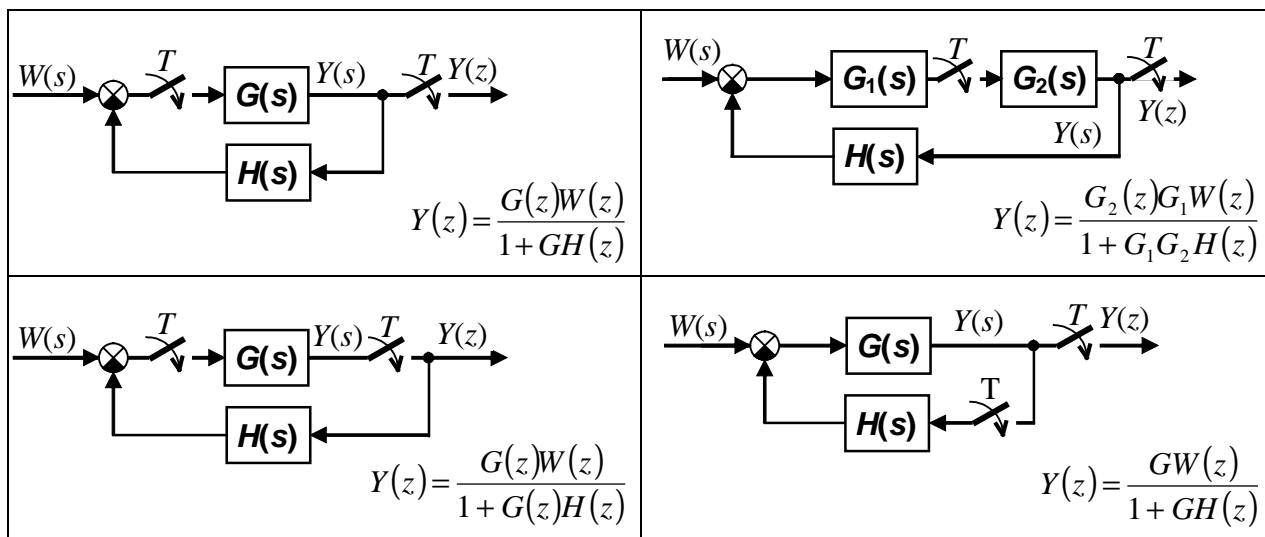
Řešení: Přenos zapojení vzorkovač – tvarovač – spojitá soustava je podle (12.71)

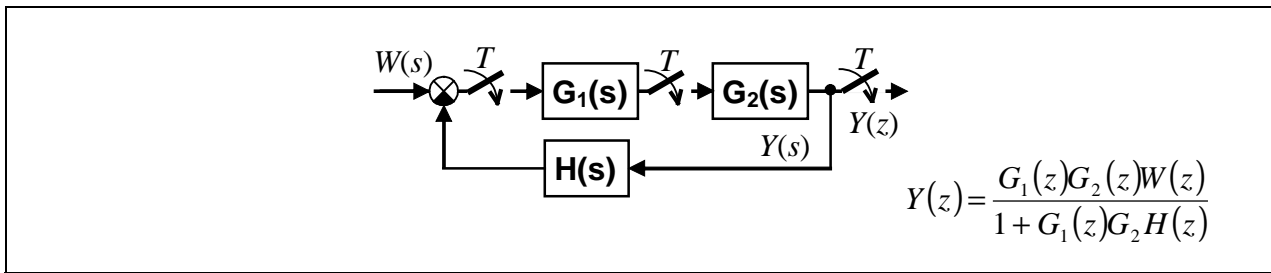
$$G_C(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_S(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{1}{s(2s+1)(s+1)}\right\} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{2}{s+0,5} + \frac{1}{s+1}\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-e^{-0,5}} + \frac{z}{z-e^{-1}} \right] = \frac{0,18z+0,094}{z^2-0,97z+0,223}$$

Přenos řízení je podle (12.70), kde ale za $G_S(z)$ musíme dosadit $G_C(z)$ – soustava s tvarovačem

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{\frac{1,8-2z^{-1}+0,5z^{-2}}{1-z^{-1}} \cdot \frac{0,18z+0,094}{z^2-0,97z+0,223}}{1 + \frac{1,8-2z^{-1}+0,5z^{-2}}{1-z^{-1}} \cdot \frac{0,18z+0,094}{z^2-0,97z+0,223}} = \frac{0,32z^3-0,186z^2-0,1z+0,047}{z^4-1,655z^3+1,012z^2-0,323z+0,047}$$



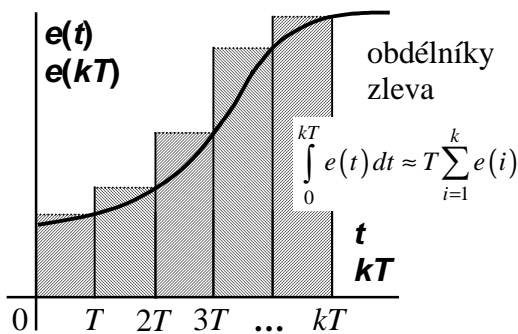


Tab. 12.5

Pět typických konfigurací diskretních regulačních obvodů

12.5 Číslicové regulátory

12.5.1 Algoritmus číslicových regulátorů



Obr. 12.31

Od číslicového regulátoru budeme očekávat stejnou funkci jako od spojitého regulátoru, to znamená zesilovat, integrovat a derivovat vstupující regulační odchylku. Proto při sestavování algoritmu pro číslicový regulátor vyjdeme z funkce a tím i rovnice spojitého PID regulátoru. PID regulátor je popsán rovnicí (3.126), kterou upravíme vytknutím r_0 stejně, jako tomu bylo u přenosu PID regulátoru, abychom získali tvar s časovými konstantami. Takže výchozí rovnice PID regulátoru je

$$u(t) = r_0 \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (12.72)$$

s přenosem

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (12.73)$$

Číslicovou verzi regulátoru získáme z této rovnice diskretizací integrace a derivace. Integraci provedeme náhradou spojitého signálu tzv. stupňovitou náhradou zleva (obdélníky zleva – mohli jsme také použít obdélníky zprava či sečnovou náhradou lichoběžníky). Určení hodnoty integrálu se provádí jako součet ploch pod náhradním průběhem a je uvedeno na obr. 12.31. Ve vztahu jsme zatím ponechali (z důvodů, které uvidíme později) vzorkovací periodu obecně T (ne rovnu jednotce)

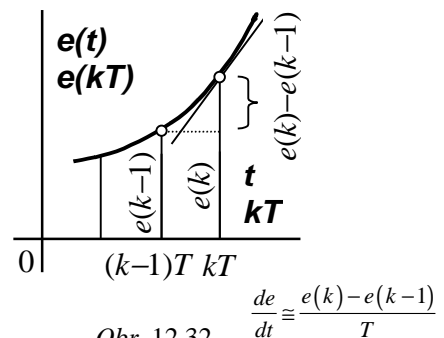
$$\int_0^{kT} e(t) dt \cong T \sum_{i=1}^k e(i) \quad (12.74)$$

Derivaci získáme nahrazením diferencemi (poděleními T , tj. poměrnými diferencemi) podle obr. 12.32

$$\frac{de}{dt} \cong \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (12.75)$$

Ve jmenovateli zatím ponecháme vzorkovací periodu T (nejednotkovou). Po dosazení těchto vztahů do rovnice spojitého PID regulátoru (12.72), kam současně dosadíme diskretní čas kT respektive k , dostaneme

$$u(k) = r_0 \left\{ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^k e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\} \quad (12.76)$$



Obr. 12.32

$$\frac{de}{dt} \cong \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

Tomuto algoritmu číslicového regulátoru se říká **polohový algoritmus** a používá se především pro regulátory, které neobsahují sumační složku. Hodnota integrálu se zde získává **sumací** a hodnota derivace se

získává pomocí **zpětné difference** [Balátě, 2003]. Proto se tyto regulátory nazývají **proporcionálně-sumačně-diferenční** a označují zkratkou **PSD**. Polohový algoritmus se nepoužívá hlavně pro sumaci, která znamená komplikaci při výpočtu akčního zásahu $u(k)$. Z-přenos polohového algoritmu dostaneme z rovnice (12.76)

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = r_0 \left[1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right] \quad (12.77)$$

protože platí

$$Z \left\{ \sum_{i=0}^k f(iT) \right\} = \frac{z}{z-1} F(z), \quad f(0) = 0; \quad Z \{ \nabla f(kT) \} = Z \{ f(kT) - f[(k-1)T] \} = \frac{z-1}{z} F(z)$$

a přetřansformováním rovnice (12.76) Z-transformací bychom dostali rovnici

$$U(z) = r_0 \left[E(z) + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} E(z) + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} E(z) \right]$$

ze které už známým způsobem získáme přenos daný rovnicí (12.77).

Přejdeme k tzv. **přírůstkovému algoritmu** PSD regulátoru. Podle tohoto algoritmu se určuje nikoliv hodnota $u(k)$ akční veličiny v daném okamžiku, ale pouze její změna, čili přírůstek

$$\nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$$

oproti hodnotě $u(k-1)$ akční veličiny v předchozím kroku.

Využijeme-li platnosti rovnice polohového algoritmu (12.76) tak, že podle ní vyjádříme také hodnotu $u(k-1)$ v předchozím kroku

$$u(k-1) = r_0 \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\} \quad (12.78)$$

můžeme vypočítat přírůstek $\nabla u(k)$, a tím i definovat rovnici přírůstkového algoritmu odečtením rovnice (12.78) od rovnice (12.76)

$$u(k) - u(k-1) = r_0 \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^k e(i) - \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] - \frac{T_d}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\}$$

Stačí si uvědomit, že

$$\frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^k e(i) - \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) = \frac{T}{T_i} [(e_1 + e_2 + \dots + e_{k-1} + e_k) - (e_1 + e_2 + \dots + e_{k-1})] = \frac{T}{T_i} e(k)$$

takže je

$$u(k) - u(k-1) = r_0 \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right\} \quad (12.79)$$

tj.

$$\nabla u(k) = r_0 \left\{ \nabla e(k) + \frac{T}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T} \nabla^2 e(k) \right\}$$

Vidíme, že u přírůstkového algoritmu regulátoru regulační odchylka vystupuje pouze u sumační (u spojitých regulátorů nazývané integrační) složky. Z tohoto důvodu lze použít přírůstkový algoritmus jen u regulátorů, které obsahují sumační složku (S, PS, PSD), jinak by v ustáleném stavu ($\nabla e(k) = \nabla^2 e(k) = 0$) došlo k rozpojení regulačního obvodu.

Po úpravě (12.79) dostaneme

$$u(k) - u(k-1) = r_0 \underbrace{\left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right)}_{q_0} e(k) - r_0 \underbrace{\left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right)}_{q_1} e(k-1) + r_0 \underbrace{\frac{T_d}{T}}_{q_2} e(k-2) \quad (12.80)$$

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (12.81)$$

To je přírůstkový tvar algoritmu PSD regulátoru. Koeficienty rovnice jsou dány vztahy

$$\boxed{q_0 = r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right) \quad q_1 = -r_0 \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) \quad q_2 = r_0 \frac{T_d}{T}} \quad (12.82)$$

Akční zásah $u(k)$ je funkcí současné regulační odchylky, předcházející regulační odchylky, předpředcházející regulační odchylky a předcházejícího akčního zásahu

$$u(k) = f[e(k), e(k-1), e(k-2), u(k-1)]$$

Algoritmus je jednoduchý a neklade větší požadavky na paměť počítače.

Z této rovnice určíme podle rovnice (12.42) Z-přenos PSD regulátoru

$$\boxed{G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}} \quad (12.83)$$

Příklad 12.23: Převed'te spojité regulátor PID, jehož parametry byly k dané soustavě navrženy některou z optimalizačních metod na číslicový PSD regulátor při vzorkovací periodě $T = 0,1$ s. Určete jeho diferenční rovnici a Z-přenos. Regulátor je dán přenosem

$$G_R(s) = 0,4 \left(1 + \frac{1}{0,5s} + 0,1s \right)$$

Řešení: Parametry q_0 , q_1 a q_2 určíme ze vztahů (12.82). Z daného přenosu regulátoru je vidět, že $r_0 = 0,4$, $T_i = 0,5$ s a $T_d = 0,1$ s.

$$q_0 = r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right) = 0,4 \left(1 + \frac{0,1}{0,1} + \frac{0,1}{0,5} \right) = 0,88$$

$$q_1 = -r_0 \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) = -0,4 \left(1 + 2 \frac{0,1}{0,1} \right) = -1,2$$

$$q_2 = r_0 \frac{T_d}{T} = 0,4 \frac{0,1}{0,1} = 0,4$$

Diferenční rovnice je $u(k) - u(k-1) = 0,88 e(k) - 1,2 e(k-1) + 0,4 e(k-2)$

$$\text{Z-přenos je } G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{0,88 - 1,2 z^{-1} + 0,4 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

12.5.2 Souvislost mezi typy spojitých a diskretních regulátorů

Stejným způsobem, jakým jsme od spojitého PID regulátoru přešli k diskretnímu PSD regulátoru, můžeme přejít od spojitého P regulátoru k diskretnímu P regulátoru, od spojitého I regulátoru k diskretnímu S regulátoru, od spojitého PI regulátoru k diskretnímu PS regulátoru a od spojitého PD regulátoru k diskretnímu PD regulátoru.

Spojité P regulátor \rightarrow **diskretní P regulátor:** (12.84)

$$u(t) = r_0 e(t) \rightarrow u(k) = r_0 e(k) \rightarrow G_R(z) = q_0, \quad \text{kde } q_0 = r_0$$

Spojité I regulátor \rightarrow **diskrétní S regulátor:**

(12.85)

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{r_0}{T_i} \int_0^{kT} e(t) dt \rightarrow u(k) = \frac{r_0}{T_i} T \sum_{i=1}^k e(i) \rightarrow u(k-1) = \\ &= \frac{r_0}{T_i} T \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \rightarrow u(k) - u(k-1) = \frac{r_0}{T_i} T e(k) \\ G_R(z) &= \frac{q_0}{1-z^{-1}}, \quad \text{kde } q_0 = r_0 \frac{T}{T_i} \end{aligned}$$

Spojité PI regulátor \rightarrow **diskrétní PS regulátor:**

(12.86)

$$\begin{aligned} u(t) &= r_0 \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^{kT} e(t) dt \right) \rightarrow u(k) = r_0 \left(e(k) + \frac{1}{T_i} T \sum_{i=1}^k e(i) \right) \rightarrow u(k-1) = \\ &= r_0 \left(e(k-1) + \frac{1}{T_i} T \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right) \\ \rightarrow u(k) - u(k-1) &= r_0 \left(1 + \frac{T}{T_i} \right) e(k) - r_0 e(k-1) \rightarrow G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}, \\ \text{kde } q_0 &= r_0 \left(1 + \frac{T}{T_i} \right); q_1 = -r_0 \end{aligned}$$

Spojité PD regulátor \rightarrow **diskrétní PD regulátor:**

(12.87)

$$\begin{aligned} u(t) &= r_0 \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \rightarrow u(k) = r_0 \left(e(k) + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] \right) \rightarrow \\ \rightarrow G_R(z) &= r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right) = r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} \right) - r_0 \frac{T_d}{T} z^{-1} \rightarrow G_R(z) = q_0 + q_1 z^{-1}, \quad \text{kde} \\ q_0 &= r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} \right); q_1 = -r_0 \frac{T_d}{T} \end{aligned}$$

V následující tabulce jsou tabelovány pro jednotlivé typy číslicových regulátorů příslušné hodnoty q_0 , q_1 a q_2 a Z - přenos tohoto regulátoru.

typ	q_0	q_1	q_2	$G_R(z)$
P	r_0	0	0	q_0
S	$r_0 \frac{T}{T_i}$	0	0	$\frac{q_0}{1-z^{-1}}$
PS	$r_0 \left(1 + \frac{T}{T_i} \right)$	$-r_0$	0	$\frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}$
PD	$r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} \right)$	$-r_0 \frac{T_d}{T}$	0	$q_0 + q_1 z^{-1}$
PSD	$r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right)$	$-r_0 \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right)$	$r_0 \frac{T_d}{T}$	$\frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1-z^{-1}}$

Tab. 12.6

Přenosy jednotlivých typů číslicových regulátorů

Avšak ne každý přenos odpovídající vztahu (12.83) anebo přenosům z tab. 12.6 je přenos číslicového regulátoru daného typu. Když např. zvolíme náhodně přenos

$$G_R(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

odpovídá tento přenos přenosu (12.83). Může to podle tab. 12.6 být přenos PSD regulátoru a také to vůbec nemusí být přenos regulátoru. To poznáme podle přechodové charakteristiky. Budeme se blíže zabývat přechodovými charakteristikami číslicových regulátorů v souvislosti s přechodovými charakteristikami spojitého regulátorů.

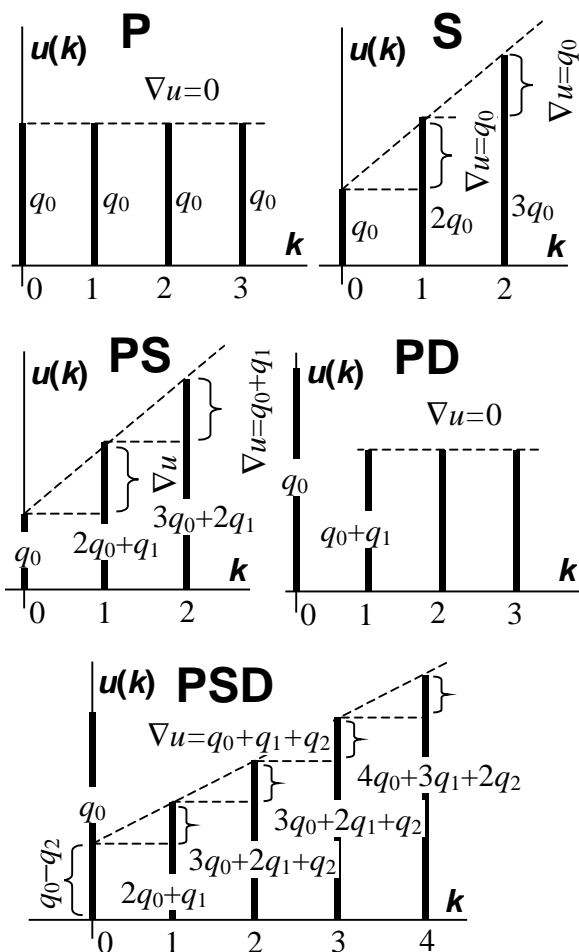
Požadujeme, aby přechodová charakteristika číslicového regulátoru odpovídala ekvivalentnímu typu spojitého regulátoru. Přechodové charakteristiky spojitého regulátorů a jejich diskrétní ekvivalenty jsou na obr. 12.33. U regulátoru typu S ovšem není první akční zásah nulový, takový regulátor by reagoval se zpožděním, ale jeho přechodová charakteristika bude v podstatě jako charakteristika PS regulátoru – první akční zásah je kladný.

Přechodovou funkci číslicového PSD regulátoru získáme tak, že do diferenční rovnice regulátoru (12.80) dosadíme za vstupní funkci $e(k)$ jednotkový skok $\eta(k)$ a rovnici vyřešíme (odezva je přechodová funkce)

$$u(k) = q_0\eta(k) + q_1\eta(k-1) + q_2\eta(k-2) + u(k-1) \quad (12.88)$$

$$\begin{aligned} k=0: & \quad u(0) = q_0 \\ k=1: & \quad u(1) = 2q_0 + q_1 \\ k=2: & \quad u(2) = 3q_0 + 2q_1 + q_2 \\ k=3: & \quad u(3) = 4q_0 + 3q_1 + 2q_2 \\ k=4: & \quad u(4) = 5q_0 + 4q_1 + 3q_2 \end{aligned}$$

.....



Obr. 12.34

Přechodové charakteristiky číslicových regulátorů jsou vyneseny na obr. 12.34. Z těchto charakteristik vyplývají podmínky pro to, aby přechodová charakteristika právě taková byla, jsou uvedeny v tab. 12.7. Tyto podmínky jsou nezbytné pro to, aby příslušný typ regulátoru byl tímto regulátorem.

Rozbor začneme **obecnou podmínkou** platnou pro všechny typy regulátorů a to je, že první akční zásah je kladný

$$q_0 > 0$$

P regulátor musí mít přírůstek ∇u nulový. Nepoužíváme přírůstkový algoritmus regulace (regulátor nemá sumační složku) a dostáváme pouze obecnou podmínku

$$u(0) = u(1) = u(2) = \dots = q_0 \Rightarrow \text{podmínka: } q_0 > 0$$

S regulátor nemá mimo obecnou podmínku $q_0 > 0$ žádnou jinou, protože platí

$$\nabla u = q_0 > 0$$

PS regulátor má přírůstek ∇u akční veličiny kladný

$$\nabla u = q_0 + q_1 > 0 \Rightarrow \text{podmínka: } q_0 + q_1 > 0$$

- PD regulátor** má
- přírůstek akční veličiny ∇u nulový ($u(k) = \text{konst.}$, pro $k > 0$)
 $u(1) = u(2) = \dots = q_0 + q_1 \Rightarrow$ podmínka: $q_0 + q_1 > 0$
 - první hodnota akční veličiny $u(0)$ musí být větší než stejné ostatní
 $u(0) = q_0 > u(1) = u(2) = \dots \Rightarrow$ podmínka: $q_1 < 0$
- PSD regulátor** má
- přírůstek akční veličiny ∇u kladný
 $\nabla u = q_0 + q_1 + q_2 > 0 \Rightarrow$ podmínka: $q_0 + q_1 + q_2 > 0$
 - první hodnota akční veličiny musí být větší než druhá
 $u(0) > u(1) \Rightarrow q_0 > 2q_0 + q_1 \Rightarrow$ podmínka: $q_0 + q_1 < 0$
 - přímka nárůstu musí vytínat na svislé ose kladný úsek
 $u(1) - \nabla u > 0 \Rightarrow 2q_0 + q_1 - (q_0 + q_1 + q_2) > 0 \Rightarrow$ podmínka: $q_0 - q_2 > 0$

typ	$G_R(z)$	podmínka	
P	q_0	$\nabla u = 0$	$q_0 > 0$
S	$\frac{q_0}{1 - z^{-1}}$	$\nabla u > 0$	$q_0 > 0$
PS	$\frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	$\nabla u > 0$	$q_0 + q_1 > 0$
PD	$q_0 + q_1 z^{-1}$	$\nabla u = 0$ $u(0) > u(1) = u(2) = \dots$ $u(1) = u(2) = \dots > 0$	$q_0 + q_1 > 0$ $q_1 < 0$
PSD	$\frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$	$\nabla u > 0$ $u(0) > u(1)$ $u(1) - \nabla u > 0$	$q_0 + q_1 + q_2 > 0$ $q_0 + q_1 < 0$ $q_0 - q_2 > 0$
+ obecná podmínka		$u(0) > 0$	$q_0 > 0$

Tab. 12.7

Omezující podmínky číslicových regulátorů

Příklad 12.24: Podle přenosu rozhodněte o typu regulátoru.

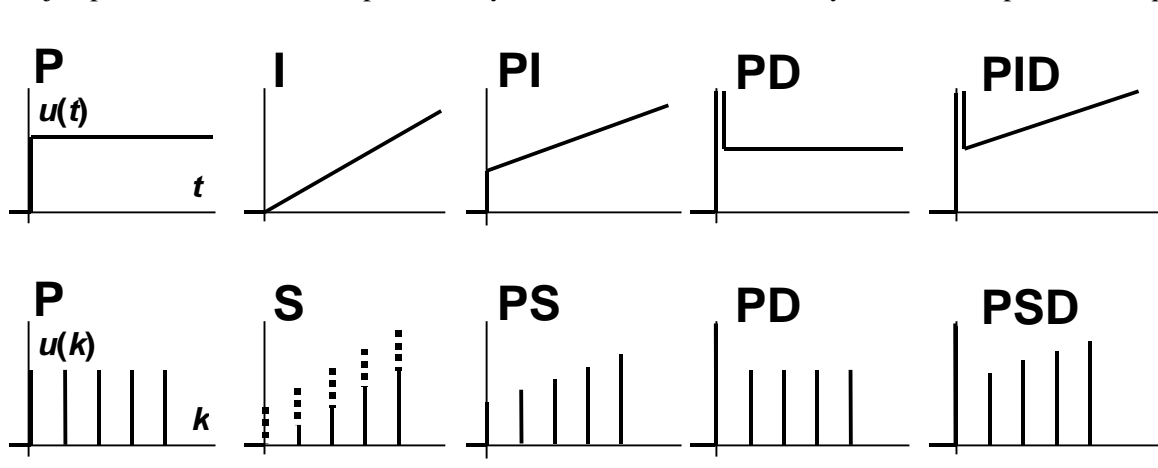
Řešení: Je uvedeno vždy vedle zadaného přenosu.

a)	$G_R(z) = 0,6$	P regulátor	
b)	$G_R(z) = \frac{0,6 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	PS regulátor	
c)	$G_R(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	přenos neodpovídá žádnému regulátoru	$q_0 + q_1 < 0$
d)	$G_R(z) = \frac{0,5}{1 - z^{-1}}$	S regulátor	
e)	$G_R(z) = 4 - 2z^{-1}$	PD regulátor	
f)	$G_R(z) = \frac{1,8 - 2z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - z^{-1}}$	PSD regulátor	
g)	$G_R(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - z^{-1}}$	přenos neodpovídá žádnému regulátoru	$q_0 + q_1 > 0$ $q_0 - q_2 < 0$
h)	$G_R(z) = \frac{0,5 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - z^{-1}}$	přenos neodpovídá žádnému regulátoru	$q_0 + q_1 + q_2 = 0$ $q_0 - q_2 = 0$
i)	$G_R(z) = \frac{2 - 1,2z^{-1} - 0,8z^{-2}}{1 - z^{-1}}$	přenos neodpovídá žádnému regulátoru	$q_0 + q_1 + q_2 = 0$ $q_0 + q_1 > 0$
j)	$G_R(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1}}$	přenos neodpovídá žádnému regulátoru	$q_0 + q_1 = 0$ $q_0 - q_2 = 0$

12.5.3 Technické problémy při nasazení PSD regulátorů

Rovnice spojitého PID regulátoru je idealizací chování skutečného PID regulátoru. Na rozdíl od toho probíhá výpočet akčního zásahu u číslicového PSD regulátoru přesně podle příslušné diferenční rovnice. To činí praktické problémy v praktickém nasazení číslicových regulátorů, neboť nedochází k přirozenému útlumu velkých a prudkých změn hodnot regulační odchylky, a tím i akční veličiny jak je tomu u spojitých regulátorů.

U skutečných spojitých PID regulátorů dochází k setrvačnosti, která není podstatná vzhledem k dynamice regulované soustavy, ale je přirozeným filtrem šumu a zejména jeho vysokofrekvenčních složek. Také je zpoždovacím faktorem při skokových změnách žádané hodnoty. Proto nebezpečí vzniku prudkých



Obr. 12.33

obvodech tak velké jako u diskretních regulačních obvodů.

K velkým změnám akční veličiny dochází u číslicového regulátoru vlastně vždy, když se výrazně změní regulační odchylka (a zvláště tehdy, když je výrazný podíl proporcionální a diferenční složky PSD regulátoru). Protože signál reprezentující údaje o regulované veličině nebo regulační odchylce doprovází šum, jsou vzorky těchto veličin ve skutečnosti zatíženy náhodnou chybou.

Negativním důsledkům **vzniku prudkých a velkých změn regulační odchylky lze čelit buď zařazením filtru** (skutečného technického nebo častěji programového) před vlastní číslicový PSD regulátor **anebo modifikováním standardního tvaru PSD algoritmu** tak, že některé z filtračních nebo zpoždovacích opatření bude tvořit přímo součást algoritmu.

Filtrace vzorkované veličiny. Diferenční rovnice diskretního filtru 1. řádu je

$$e_f(k) = (1-a)e_f(k-1) + ae(k) \quad (12.89)$$

kde $a = \frac{1}{1 + \frac{T_f}{T}}$ je koeficient filtrace. Pro $a = 1$ není vstupní veličina filtrována vůbec a pro $a = 0$ je

vstupní veličina odpojena

Další způsoby, jak zabránit prudkým a velkým změnám akční veličiny v důsledku prudkých změn regulační odchylky, jsou v modifikaci vlastního algoritmu PSD regulátoru. Ve většině použití PSD regulátoru není vhodné, aby do regulátoru, což budeme brát jako do vzorce (12.79)

$$u(k) - u(k-1) = r_0 \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right\} \quad (12.90)$$

vstupovala pouze regulační odchylka $e(k)$. Tam, kde je žádaná veličina $w(k)$ po většinu času konstantní a jen někdy se ručně přestaví, není žádoucí, aby její ručně provedená změna byla ještě derivována a vnesla do řízení zcela nevhodný nárazový účinek. V menší míře to platí i o P složce regulátoru. Tím dostaneme alternativu algoritmu (12.79) s potlačeným vlivem žádané hodnoty $w(k)$ v P a D složce.

Pro $w(k) = w = \text{konst.}$ platí

$$\left. \begin{array}{l} e(k) = w - y(k) \\ e(k-1) = w - y(k-1) \\ e(k-2) = w - y(k-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e(k) - e(k-1) = -y(k) + y(k-1) \\ e(k) - 2e(k-1) + e(k-2) = -y(k) + 2y(k-1) - y(k-2) \end{array} \right.$$

$$u(k) - u(k-1) = r_0 \left\{ -y(k) + y(k-1) + \frac{T}{T_i} [w(k) - y(k)] + \frac{T_d}{T} [-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)] \right\} \quad (12.91)$$

Z tohoto tvaru algoritmu PSD regulátoru je vidět důležitý význam sumační (u spojitých systémů integrační) složky. Regulátor bude v činnosti tak dlouho, pokud nebude $w(k) - y(k) = 0$ a zabezpečuje tak dosažení stavu $w(k) = y(k)$, tedy nulové trvalé regulační odchylky. Bez S složky bude obvod pracovat s trvalou regulační odchylkou, stejně jako tomu bylo u spojitých systémů.

Potlačení vzniku velkých změn akční veličiny v důsledku diskretní realizace spojitě derivace na šumem zatížené regulační odchylce $e(k)$ se provádí přímo v algoritmu náhrady derivace. Místo ideální spojitě derivace $T_d \frac{de(t)}{dt}$ se provádí náhrada členem $T_d \frac{s}{\tau s + 1}$, tedy derivačním členem se setrvačností prvního

řádu, který funguje jako filtr. Je to výhodnější než filtr před regulátorem, neboť filtrace je zaměřena pouze na derivační složku a nevnaší setrvačnost do proporcionální a sumační složky činnosti.

U regulátorů s diferenční složkou se používá průměrování diference v diskretním výpočtu derivace regulační odchylky. Je založeno na výpočtu průměrné hodnoty regulační odchylky z několika intervalů. Např. z posledních čtyř vzorků regulační odchylky spočítáme průměr

$$\overline{e(k)} = \frac{e(k) + e(k-1) + e(k-2) + e(k-3)}{4} \quad (12.92)$$

a z tohoto průměru spočítáme náhradu derivace (12.75)

$$\frac{de(t)}{dt} \cong \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (12.93)$$

12.5.4 Seřízení číslicových regulátorů

12.6 Metoda Ziegler-Nicholsova a podle přechodové charakteristiky soustavy

typ	r_0	$r_0 \frac{T}{T_i}$	$r_0 \frac{T_d}{T}$
P	$0,5r_{0k}$	-	-
PS	$0,45r_{0k} - 0,27r_{0k} \frac{T}{T_k}$	$0,54r_{0k} \frac{T}{T_k}$	-
PSD	$0,6r_{0k} \left(1 - \frac{T}{T_k}\right)$	$1,2r_{0k} \frac{T}{T_k}$	$\frac{3}{40} r_{0k} \frac{T}{T_k}$

Tab. 12.8 Parametry PSD regulátorů podle Ziegler-Nicholse

Metodami, které známe již ze spojitého systému, jako jsou metoda Ziegler-Nicholsova anebo z průběhu přechodové charakteristiky, můžeme pomocí tab. 12.8, příp. tab. 12.9 dopočítat optimální parametry diskretních regulátorů.

Postup při získávání potřebných parametrů je stejný jako u spojitého regulátoru. U Ziegler-Nicholsovy metody (mluvíme o výpočtu – ne o realizaci na skutečném zařízení) – spočítáme ze známého přenosu soustavy spolu s P regulátorem Z-přenos řízení $G_w(z)$ a jeho jmenovatel je charakteristická rovnice. Použitím bilineární transformace převedeme do roviny w a z ní určíme kritické zesílení r_{0k} a periodu

kmitu T_k na hranici stability.

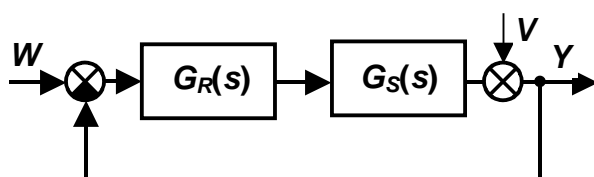
typ	r_0	$r_0 \frac{T}{T_i}$	$r_0 \frac{T_d}{T}$
P	$\frac{1}{k} \frac{T_n}{T_u + T}$	-	-
PS	$\frac{1}{k} \left[\frac{0,9T_n}{T_u + 0,5T} - \frac{0,135T_n T}{(T_u + 0,5T)^2} \right]$	$\frac{1}{k} \frac{0,27T_n T}{(T_u + 0,5T)^2}$	-
PSD	$\frac{1}{k} \left[\frac{1,2T_n}{T_u + T} - \frac{0,35T_n T}{(T_u + 0,5T)^2} \right]$	$\frac{1}{k} \frac{0,6T_n T}{(T_u + 0,5T)^2}$	$\frac{1}{k} \frac{0,5T_n}{T}$

Tab. 12.9 Parametry PSD regulátorů podle přech. charakteristiky soustavy

U druhé metody určujeme parametry regulátoru z doby průtahu T_u , doby náběhu T_n a konstanty soustavy k stejně jako u spojitého systému.

Metoda požadovaného modelu (metoda inverze dynamiky)

Tato metoda je velmi jednoduchá a umožňuje seřizování **jak číslicových regulátorů** pro diskretní



Obr. 12.35

regulační obvody, **tak i spojitého regulátorů** pro spojité regulační obvody. Její podrobné odvození je uvedeno v práci [Vítečková, 1998] a [Vítečková, 1999]. Tato metoda seřizování regulátorů vychází z obecných principů inverze dynamiky a v našem případě se redukuje na nalezení takového regulátoru s přenosem $G_R(z)$ nebo $G_R(s)$ (tvar

Typ regulátoru	Analogový regulátor	Číslicový regulátor
P	r_0	r_0
PI (PS)	$r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$	$r_0 \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} \right)$
PD	$r_0 (1 + T_d s)$	$r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right)$
PID (PSD)	$r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$	$r_0 \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right)$

Tab. 12.10 Uvažované přenosy konvenčních regulátorů

metoda umožňuje seřadit regulační obvod na předem zvolený relativní překmit přechodové charakteristiky v mezích 0 – 50 % (obr. 12.36a). U soustav bez dopravního zpoždění dává nekmitavé průběhy přechodové charakteristiky.

Metoda předpokládá, že požadovaný přenos řízení má pro diskrétní, popř. spojitý regulační obvody tvar (pro $T_D > 0$, tedy s dopravním zpožděním)

$$G_w(z) = \frac{aT}{z-1 + aTz^{-\frac{T_D}{T}}} z^{-\frac{T_D}{T}}, \quad G_w(s) = \frac{a}{s + ae^{-T_D s}} e^{-T_D s} \quad (12.95)$$

kde a je zesílení otevřeného regulačního obvodu, T_D – dopravní zpoždění, které je stejné jako u regulované soustavy, a T – vzorkovací perioda, pro jejíž velikost je doporučen vztah $T < 0,32T_D$ a pro jednoduchost se předpokládá, že dopravní zpoždění T_D je celočíselným násobkem vzorkovací periody T .

Závislost velikosti zesílení otevřeného regulačního obvodu a na požadovaném překmitu κ přechodové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu je dána vztahem

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_D} \quad (12.96)$$

Hodnoty koeficientů α a β jsou uvedeny v tab. 12.11 a byly získány číslicovou simulací. V případě, že regulovaná soustava neobsahuje dopravní zpoždění ($T_D = 0$), je uvažován požadovaný přenos řízení pro diskrétní, popř. spojitý regulační obvody ve tvaru (obr. 12.36b)

$$G_w(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_w}}}{z - e^{-\frac{T}{T_w}}}, \quad G_w(s) = \frac{1}{T_w s + 1} \quad (12.97)$$

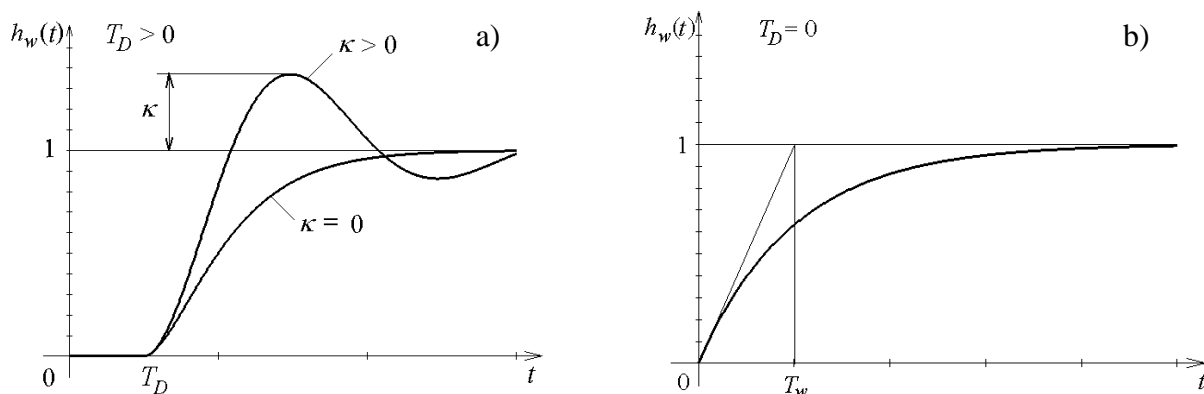
V tomto případě regulační proces je vždy aperiodický a časovou konstantu uzavřeného regulačního obvodu T_w je třeba volit s ohledem na omezení akční veličiny a maximální nastavitelnou hodnotu zesílení regulátoru $r_{0\max}$. Pro volbu vzorkovací periody je vhodné použít vztah $T < 0,3T_w$.

těchto přenosů jsou v tab. 12.10), který zajistí na základě vztahu

$$G_R = \frac{1}{G_S} \frac{G_w}{1 - G_w} \quad (12.94)$$

pro regulovanou soustavu s přenosem G_S (u diskrétního regulačního obvodu je třeba uvažovat celkový přenos regulované soustavy, tj. i s příslušným vzorkovačem a tvarovačem) požadovaný model uzavřeného regulačního obvodu, tj. požadovaný přenos řízení G_w (obr. 12.35).

Je-li regulovaná soustava s dopravním zpožděním (které může být i dominantní), pak daná



Obr. 12.36 Přechodové charakteristiky regulačního obvodu: a) pro $T_D > 0$, b) pro $T_D = 0$

κ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
α	1,282	0,984	0,884	0,832	0,763	0,697	0,669	0,640	0,618	0,599	0,577
β	2,718	1,944	1,720	1,561	1,437	1,337	1,248	1,172	1,104	1,045	0,992

Tab. 12.11

Závislost koeficientů α a β na relativním překmitu

REGULOVANÁ SOUSTAVA	12.6.1.1 REGULÁTOR		ANALOGOVÝ $T = 0$		ČÍSLICOVÝ $T > 0$	
	12.6.1.2 YP	r_0^*		T_i^*	T_d^*	T_d^*
		$T_D = 0$	$T_D > 0$			
$\frac{k_1}{s} e^{-T_D s}$	P	$\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{a}{k_1}$	-	-	-
$\frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_D s}$	PI (PS)	$\frac{2T_i^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_i^*}{k_1}$	$T_1 - \frac{T}{2}$	-	-
$\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-T_D s}$	PD	$\frac{2}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{a}{k_1}$	-	$T_1 - \frac{T}{2}$	-
$\frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_D s}$ $T_1 \geq T_2$	12.6.1.3 ID (PSD)	$\frac{2T_i^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_i^*}{k_1}$	$T_1 + T_2 - T$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$	-
$\frac{k_1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1} e^{-T_D s}$ $0,5 < \xi_0 \leq 1$	12.6.1.4 ID (PSD)	$\frac{2T_i^*}{k_1(2T_w + T)}$	$\frac{aT_i^*}{k_1}$	$2\xi_0 T_0 - T$	$\frac{T_0}{2\xi_0} - \frac{T}{4}$	-

Tab. 12.12 Doručené typy regulátorů a hodnoty jejich stavitelných parametrů pro metodu požadovaného modelu

Ze vztahu (12.94) při uvažování žádaných přenosů (12.95) a (12.97) vylpynou přenosy doporučených konvenčních regulátorů z tab. 12.10 pro základní přenosy regulovaných soustav, které jsou uvedeny v tab. 12.12 v prvním sloupci. V dalších sloupcích tab. 12.12 je vždy uveden doporučený typ regulátoru a zjednodušené vztahy pro určení doporučených hodnot jeho stavitelných parametrů. V případě jiných tvarů přenosů regulovaných soustav je nutné je upravit na základní tvary uvedené v tab. 12.12 (bližší v [Vítečková, 1999] a [Vítečková, 2000]).

Postup při seřizování regulátorů je následující:

- upravit přenos regul. soustavy na některý ze základních tvarů uvedených v tab. 12.12
- v případě číslicového regulátoru zvolit vhodně vzorkovací periodu T a v případě spojitého regulátoru uvažovat $T = 0$.
- u regulovaných soustav s dopravním zpožděním ($T_D > 0$) pro zvolený relativní překmit κ na základě tab. 12.11 a vztahu (12.96) určit zesílení otevřeného regulačního obvodu a a z tab. 12.12 pro doporučený regulátor vypočítat hodnoty jeho stavitelných parametrů; u regulovaných soustav bez dopravního zpoždění ($T_D = 0$) pro zvolenou hodnotu časové konstanty uzavřeného regulačního obvodu T_w z tab. 12.12 pro doporučený regulátor vypočítat hodnoty jeho stavitelných parametrů.

Příklad 12.25: Pro regulovanou soustavu s dopravním zpožděním

$$G_S(s) = \frac{2}{(5s+1)(2s+1)} e^{-12s}$$

navrhněte číslicový regulátor PSD a analogový regulátor PID. Regulátory je třeba seřadit tak, aby byl zajištěn relativní překmit přechodové charakteristiky regulačního obvodu $\kappa = 0,05$ (5 %).

Řešení: Na základě vztahu ($T < 0,32T_D$) zvolíme velikost vzorkovací periody $T = 2$.

Tvar přenosu regulované soustavy odpovídá základnímu přenosu v tab. 12.12 (druhý řádek zdola), a proto pro $k_1 = 2$, $T_1 = 5$, $T_2 = 2$, $T_D = 12$ a $T = 2$ lze psát (hvězdička znamená optimální hodnoty):

pro spojitý regulátor

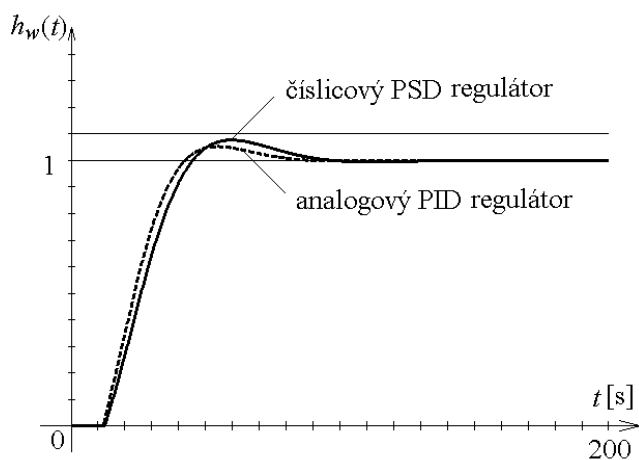
$$T_i^* = T_1 + T_2 = 5 + 2 = 7, \quad T_d^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = \frac{5 \cdot 2}{5 + 2} \doteq 1,43$$

$$a = \frac{1}{\beta T_D} = \frac{1}{1,944 \cdot 12} \doteq 0,043, \quad r_0^* = \frac{a T_i^*}{k_1} = \frac{0,043 \cdot 7}{2} \doteq 0,151$$

pro číslicový regulátor

$$T_i^* = T_1 + T_2 - T = 5 + 2 - 2 = 5, \quad T_d^* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4} = \frac{5 \cdot 2}{5 + 2} - \frac{2}{4} \doteq 0,93$$

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta T_D} = \frac{1}{0,984 \cdot 2 + 1,944 \cdot 12} \doteq 0,040 \quad r_0^* = \frac{a T_i^*}{k_1} = \frac{0,0395 \cdot 5}{2} \doteq 0,099$$



Obr. 12.37

Přechodové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu jsou na obr. 12.37. V případě, že nám tvar přechodové charakteristiky nevyhovuje, můžeme jej upravit změnou hodnoty zesílení regulátoru. Zvětšením této hodnoty, zvětšíme překmit přechodové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu a naopak.

12.6.2 Metoda optimálního modulu (pro diskrétní regulátory)

Metoda optimálního modulu se používá především při regulaci elektrických pohonů, kde se malé časové konstanty (elektrické) zastupují náhradní součtovou časovou konstantou, viz podkapitola „Úprava přenosů regulovaných soustav“. Pro spojitě regulátory jsme se s touto metodou seznámili v kapitole 3.20.4.

REGULOVANÁ SOUSTAVA		12.6.2.1 <i>REGULÁTOR</i> < <i>ANALOGOVÝ</i> $T = 0$ <i>TOR</i> <i>ČÍSLICOVÝ</i> $T > 0$			
		12.6.2.2 T <i>YP</i>	12.6.2.3 r_0	12.6.2.4 T_i	12.6.2.5 T_d
1	$\frac{k}{T_1s + 1}$	I (S)	–	$2k(T_1 - 0,5T)$	–
2	$\frac{k}{s(T_1s + 1)}$	P	$\frac{1}{2kT_1}$	–	–
3	$\frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ $T_1 \geq T_2$	PI (PS)	$\frac{T_i}{2kT_2}$	$T_1 - 0,5T$	–
4	$\frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ $T_1 \geq T_2$	PD	$\frac{1}{2k(T_2 + 0,5T)}$	–	$T_1 - 0,5T$
5	$\frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$ $T_1 \geq T_2 \geq T_3$	PID (PSD)	$\frac{T_i}{2k(T_3 + 0,5T)}$	$T_1 + T_2 - T$	$\frac{T_1T_2}{T_1 + T_2} - \frac{T}{4}$

Tab. 12.12 Optimální parametry diskrétních regulátorů pro metodu optimálního modulu

V této podkapitole je uvedeno rozšíření metody optimálního modulu na seřízení číslicových regulátorů. V tab. 12.12 jsou uvedeny jen ty kombinace regulátor – regulovaná soustava, které dávají zaručeně stabilní regulační obvod a není třeba proto kontrolovat jeho stabilitu. Tabulka je sestavena pro metodu „seřízení s kompenzací“, ve které pro $T_i = T_1$ dojde k vykrácení dvoječlenu $T_1s + 1$ v přenosu rozpojeného obvodu a tím k jeho podstatnému zjednodušení.

Postup při seřizování metodou optimálního modulu je prakticky stejný, jako je tomu při navrhování spojitých regulátorů. Přenos regulované soustavy se upraví na vhodný tvar podle tab. 12.12 a pro doporučený regulátor se vypočtou hodnoty jeho stavitelných parametrů. Pokud přenos regulované soustavy nejde upravit na některý z tvarů uvedených v této tabulce, použije se jiná metoda.

Příklad 12.26: Metodou optimálního modulu je třeba navrhnout a seřadit analogový a číslicový regulátor pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_S(s) = \frac{2}{(10s + 1)(5s + 1)}$$

s použitím tab. 3.17 a 12.12.

Řešení: V 3. řádku tab. 3.17 pro spojitě regulátory a ve stejném řádku tab. 12.12 pro číslicové regulátory je pro danou regulovanou soustavu doporučen regulátor PI respektive PS a na základě uvedených vztahů jsou vypočteny hodnoty stavitelných parametrů regulátorů:

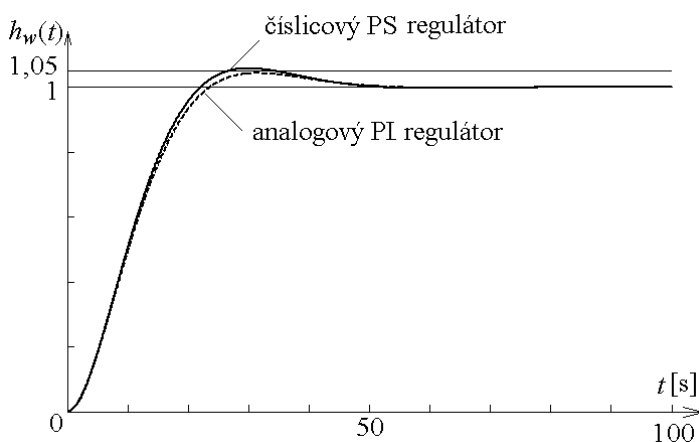
analogový regulátor $T_i = T_1 = 10$ [s]; $r_0 = \frac{T_i}{2kT_2} = \frac{10}{2.5.5} = 0,5$; $G_R(s) = 10 \left(1 + \frac{1}{0,5s} \right)$

číslicový regulátor ($T = 1$): $T_i = T_1 - 0,5T = 9,5$ [s]; $r_0 = \frac{T_i}{2kT_2} = \frac{9,5}{2.5.5} = 0,475$;

Z-přenos číslicového regulátoru s použitím (12.82):

$$q_0 = r_0 \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right) = 0,475 \left(1 + \frac{1}{9,5} \right) = 0,525; \quad q_1 = -r_0 \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) = -0,475;$$

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{0,525 - 0,475 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$



Obr. 12.38

Přechodové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu jsou uvedeny na obr. 12.38. Dostáváme přechodovou charakteristiku uzavřeného regulačního obvodu s překmitem asi 5 %. V našem případě 4,32 % při použití analogového regulátoru a o něco vyšší překmit 5,83 % při použití číslicového regulátoru.

12.6.3 Realizace číslicových regulátorů

Dnešní číslicové regulátory jsou vyráběny jako kompaktní přístroje velikosti dřívějších spojitéch regulátorů, které mohou být zasazeny do panelů na velině. Většinou celkové provedení těchto přístrojů je podobné právě těmto dřívějším spojitém regulátorům. Samozřejmě z hlediska vlastností přibývá k dřívějším vlastnostem spojitéch regulátorů celá řada dalších, zejména je to programovatelnost a ovladatelnost z nadřazeného počítače. Z regulátorů a nadřazených počítačů je možno vytvářet řídicí systémy, které vytváří spolupracující síť zvanou **distribuovaný řídicí systém**.

Podíváme-li se na vnější provedení číslicového regulátoru, vidíme většinou na jeho čelní stěně možnost tlačítka nastavit režim **ručně/automaticky**, možnost nastavit **žádanou hodnotu**, možnost při ručním řízení měnit **akční veličinu**. Na displeji je možné přepínat sledování **regulované, akční, žádané veličiny** nebo **regulační odchylky**. Také je možnost volit **řídicí algoritmus** a nastavovat **stavitelné parametry regulátoru**.

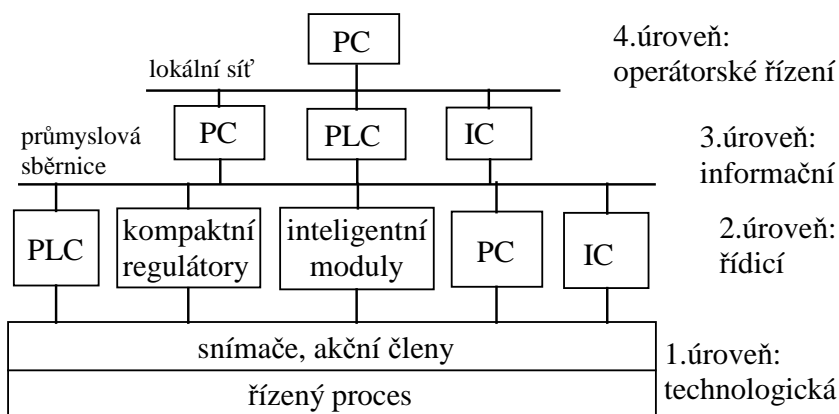
Na obr. 12.2 byl uveden základní diskretní regulační obvod. Zde nebylo zcela přihlíženo k technickým aspektům procesu v tomto obvodu. Regulovaná veličina $y(t)$ se snímá snímačem (např. odporový teploměr či termočlánek) a tato analogová veličina je digitalizována, to je vyjádřena počtem jednotkových kvant. Tento číselný údaj je zakódován binárním způsobem a teprve v tomto tvaru může být zpracován v mikro počítači. Zde teprve přichází program zahrnující uváděné diferenční rovnice regulátoru. Je zde tedy proces vzorkování – kvantování – kódování, který byl zjednodušeně zahrnut pod A – D převod.

Zpracování regulační odchylky se musí vždy opakovat po uplynutí vzorkovací periody T . K tomu je nutné, aby činnost mikro počítače byla přerušována a spouštěna časovými pulsy o stálé periodě. Každý počítač ve funkci regulátoru pracující v reálném čase musí být vybaven tímto přerušovacím systémem. Předpokládáme, že doba potřebná k výpočtu akčního zásahu je zanedbatelná vzhledem ke vzorkovací periodě T .

Výsledek výpočtu je akční zásah $u(k)$, který je binárně zakódovaný. Pro skutečný zásah do regulované soustavy je nutno jej nejdříve dekodovat a porovnáním s jednotkovými kvanty vyjádřit spojitou veličinu. Takto by však vznikaly jen krátké impulsy, které jak už bylo dříve řečeno, jsou nositeli informace a ne energie, a proto je nutné je tvarovat, udržet na hodnotě posledního impulsu po celou vzorkovací periodu. Je zde tedy opět proces dekodování – kvantování – tvarování, který je v obr. 12.2 zjednodušen jako D – A převod.

Číslicový počítač jako součást řídicího systému bývá označován jako **řídící počítač**. V sedmdesátých letech se realizoval a rozšířil jednočipový mikroprocesor, který je dodnes základem řídicího počítače. Od běžného univerzálního počítače se tento odlišuje jednak **přímým spojením** s řízeným objektem a systémem tzv. **přerušeni** řízených zdrojem časových impulsů, které umožňuje práci v reálném čase.

Diskrétní řízení má řadu výhod oproti klasickému spojitému řízení a ty ovlivňují jeho široké uplatnění v praxi. K největší výhodě patří možnost vzniku tzv. **distributedního řídicího systému**. U něho je řídicí obvod rozdělen na několik vzájemně spolupracujících celků, propojených průmyslovými komunikačními linkami. Jeho schéma je na obr. 12.39.



Obr. 12.39

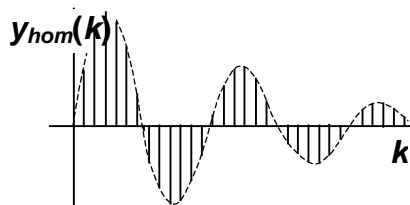
Technologickou úroveň je řízený objekt doplněn snímači a akčními členy. Řídící úroveň obsahuje systémy, které jsou svými vstupy a výstupy spojené se snímači a akčními členy řízených objektů. Jsou to především programovatelné automaty (PLC), kompaktní regulátory, inteligentní řídicí moduly a také vyšší systémy, jakými jsou řídicí počítače (IC – Industrial Computer) nebo PC doplněné vstupně-výstupními obvody pro styk s prostředím.

K dalším výhodám číslicového řízení patří velká spolehlivost a snadná změna struktury regulátorů (algoritmus řízení není tvořen hardwarově, ale programově). Regulátory diskretních systémů jsou často tvořeny jedinou výkonnou instrukcí (nejčastěji instrukce PSD) a blokem dat, které obsahují všechny požadované parametry. Konstanty regulátoru (r_0, T_i, T_d) se nastavují jejich modifikací. Základem spojitých regulátorů jsou operační zesilovače, které jsou charakteristické nestálostí výstupního napětí (drift nuly). Tento problém u diskretních regulátorů odpadá.

12.7 Stabilita diskretních obvodů

12.7.1 Obecná podmínka stability

Pro diskretní systémy platí stejná definice stability jako pro každý lineární systém: **Systém je stabilní, jestliže se po odeznění budicího signálu vrátí do rovnovážného stavu.** Názorně zobrazeno je to na obr. 12.40 a matematicky zapsáno (už pro diskretní systémy)

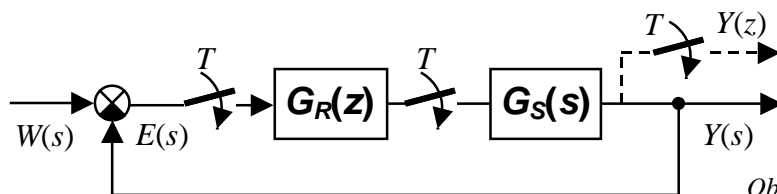


Obr. 12.40

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{hom}(k) = 0 \quad (12.98)$$

Tato definice bývá pro diskretní systémy často uváděna v trochu odlišné formě: **Obvod je stabilní, jestliže odezva na omezenou (konečnou) vstupní veličinu je opět omezená (konečná) výstupní veličina.**

Uvažujme jeden z diskretních regulačních obvodů znázorněných na obr. 12.28. Vybereme např. obr. 12.28b a znovu si



Obr. 12.41

ho uvedeme jako obr. 12.41. Jeho přenos řízení je dán vztahem (12.70) a my si ho vyjádříme jako podíl polynomů s kladnými mocninami z

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_R(z)G_S(z)}{1+G_R(z)G_S(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \quad (12.99)$$

Kdybychom uvažovali obr. 12.28a, měl by $G_R(z) = 1$, obr. 12.28c má přenos řízení stejný.

Abychom odvodili obecnou podmínku stability, převedeme Z-přenos řízení (12.99) na diferenční rovnici řízení

$$a_n y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_m w(k+m) + \dots + b_1 w(k+1) + b_0 w(k) \quad (12.100)$$

Na základě této rovnice bychom mohli stanovit průběh regulované veličiny $y(k)$ při různých změnách žádané veličiny eventuálně poruchy. Přechodný děj při těchto změnách je dán řešením této rovnice a toto řešení má tvar

$$y(k) = y_{hom}(k) + y_{part}(k) \quad (12.101)$$

kde $y_{hom}(k)$ je řešení homogenní rovnice a $y_{part}(k)$ je partikulární integrál, daný pravou stranou rovnice (12.100). Partikulární integrál závisí čistě na vstupující žádané nebo poruchové veličině a na stabilitu nemá vliv, protože stabilita je posuzována až po skončení působení vzruchu, který vyvedl regulační obvod z rovnovážného stavu. Zajímá nás tedy pouze ta první část řešení diferenční rovnice a to je $y_{hom}(k)$. Řešíme tedy homogenní rovnici k rovnici (12.100)

$$a_n y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0 \quad (12.102)$$

Toto řešení získáme tak, že nejdříve sestavíme charakteristickou rovnici k dané diferenční rovnici (budeme zde používat symbol z)

$$\boxed{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0} \quad (12.103)$$

a určíme její kořeny z_1, z_2, \dots, z_n .

Charakteristická rovnice (12.103) respektive její levá strana se nám objevuje ve jmenovateli přenosu řízení (12.99), a proto je charakteristická rovnice po úpravě také

$$\boxed{1 + G_R(z)G_S(z) = 0} \quad (12.104)$$

Jsou-li kořeny charakteristické rovnice všechny různé (nenásobné kořeny), je podle metody v kapitole 12.3.1 řešení homogenní diferenční rovnice (12.102) dáno rovnicí

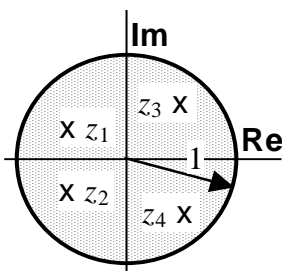
$$y_{hom}(k) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \dots + C_n z_n^k \quad (12.105)$$

Spočítejme limitu tohoto řešení

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{hom}(k) = C_1 \lim_{k \rightarrow \infty} z_1^k + C_2 \lim_{k \rightarrow \infty} z_2^k + \dots + C_n \lim_{k \rightarrow \infty} z_n^k$$

Aby byla splněna podmínka stability $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{hom}(k) = 0$ musí být kořeny charakteristické rovnice

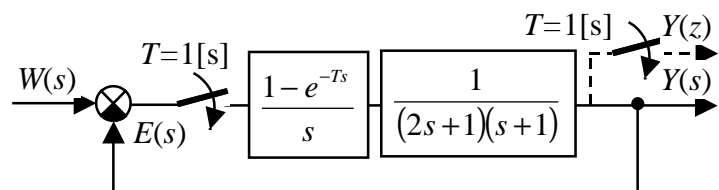
$$\boxed{|z_i| < 1} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n \quad (12.106)$$



Obr. 12.42

Diskrétní obvod je stabilní, leží-li kořeny charakteristické rovnice uvnitř jednotkové kružnice – obr. 12.42.

Příklad 12.27: Určete stabilitu diskrétního regulačního obvodu podle obr. 12.43.



Obr. 12.43

Řešení: Je to typ obvodu, který je na obr. 12.28a. Do přenosu řízení danému rovnicí (12.99)

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_R(z)G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)}$$

musíme dosadit $G_R(z) = 1$ a za $G_S(z)$ přenos tvarovače a soustavy podle rovnice (12.71)

$$\begin{aligned} G_S(z) &= (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s(2s+1)(s+1)}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{2}{s+0,5} + \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-0,5T}} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = \\ &= (z-1) \left[\frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-0,607} + \frac{1}{z-0,368} \right] = \frac{0,154z + 0,094}{z^2 - 0,975z + 0,223} \end{aligned}$$

Zde jsme použili k získání Z-obrazů slovník Z-transformace z tab. 12.1. Je tedy přenos řízení

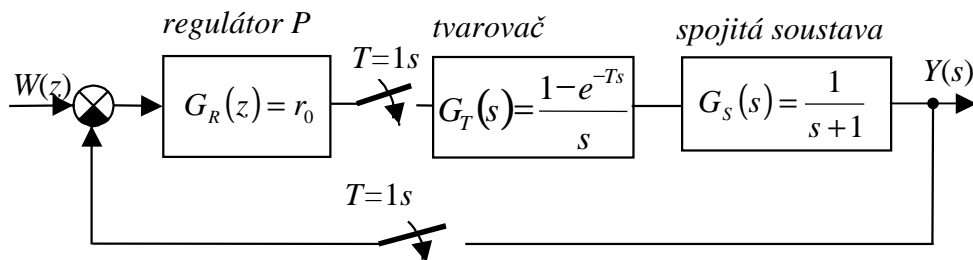
$$G_w(z) = \frac{\frac{0,154z + 0,094}{z^2 - 0,975z + 0,223}}{1 + \frac{0,154z + 0,094}{z^2 - 0,975z + 0,223}} = \frac{0,154z + 0,094}{z^2 - 0,821z + 0,317}$$

Charakteristická rovnice

$$z^2 - 0,821z + 0,317 = 0$$

má kořeny $z_{1,2} = 0,41 \pm j 0,39$. Jejich absolutní hodnota je $|z_{1,2}| = \sqrt{0,41^2 + 0,39^2} = 0,571 < 1$, leží tedy uvnitř jednotkové kružnice, a proto je obvod stabilní.

Příklad 12.28: Rozhodněte pro jaké hodnoty r_0 číslicového P regulátoru bude obvod na obr. 12.44 stabilní.



Obr. 12.44

Řešení: Přenos zapojení vzorkovač – tvarovač – soustava je (podobně jako u příkladu 12.21)

$$G_C(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G_S(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} \right) = \frac{0,632}{z-0,368}$$

Přenos řízení je podle (12.70), kde ale za $G_S(z)$ musíme dosadit $G_C(z)$ – opět podle příkladu 12.21

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_R(z)G_S(z)}{1 + G_R(z)G_S(z)} = \frac{r_0 \frac{0,632}{z-0,368}}{1 + r_0 \frac{0,632}{z-0,368}} = \frac{0,632r_0}{z-0,368 + 0,632r_0}$$

Charakteristická rovnice $z - 0,368 + 0,632r_0 = 0$ má jeden kořen $z_1 = 0,368 - 0,632r_0$ a tento kořen musí splňovat podmínku (je reálný) $-1 < z_1 < 1$.

Nerovnost $-1 < 0,368 - 0,632r_0 < 1$ má řešení $-1 < r_0 < 2,16$. Řešením problému je tedy kladná hodnota konstanty P regulátoru $r_0 < 2,16$.

12.7.2 Kritéria stability

Abychom nemuseli řešit charakteristickou rovnici, která bývá většinou vyšších stupňů než druhého, používáme stejně jako u spojitych systémů kritéria stability. Některá jsou diskrétní verze kritérií, známých ze spojitych obvodů. Seznámíme se s jedním algebraickým kritériem a jedním frekvenčním, která se používají nejčastěji.

Nejdříve si uvědomíme, co musí platit o koeficientech charakteristické rovnice (12.103)

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

když její kořeny jsou z_1, z_2, \dots, z_n . Rovnici podělíme koeficientem a_n , čímž dostaneme tvar

$$z^n + \dots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

a můžeme provést rozklad v součin kořenových činitelů

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0$$

Podmínka stability diskrétních systémů je, že kořeny této rovnice musí ležet uvnitř jednotkové kružnice, tedy $|z_i| < 1$. Pochopitelně mohou být koeficienty charakteristické rovnice kladné nebo záporné, zde není žádné omezení jako u spojitych systémů. Jediné, co musí být splněno, je to, že absolutní člen uvedené rovnice

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |z_1 \cdot z_2 \dots z_n| < 1$$

musí být v absolutní hodnotě menší než jedna, protože součin čísel menších v absolutní hodnotě než jedna musí být také menší než jedna. Z tohoto poznatku vychází následující kritérium.

Diskrétní verze Routh-Schurova kritéria. Uvedeme si algoritmus, kterým snižujeme postupně stupeň charakteristické rovnice tak dlouho, až zůstane jediný koeficient.

Mějme charakteristickou rovnici (12.103)

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Z koeficientů rovnice utvoříme následující schéma

a_n	a_{n-1}	a_2	a_1	a_0	$\left \begin{array}{l} k = -\frac{a_0}{a_n} \\ \\ = -a_0 \end{array} \right.$
a_0	a_1	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	
ka_0	ka_1	ka_{n-2}	ka_{n-1}	ka_n	
$a_n + ka_0$	$a_{n-1} + ka_1$	$a_2 + ka_{n-2}$	$a_1 + ka_{n-1}$	0	

V tomto schématu je čtvrtý řádek výsledkem součtu prvního a třetího řádku. Třetí řádek, který někdy vynecháváme, dostaneme z prvního vynásobením koeficientem $k = -\frac{a_0}{a_n}$

Pokud je tento koeficient $|k| < 1$ při všech dalších snižováních stupně charakteristické rovnice (až zůstane jeden koeficient), je daný systém stabilní. Pokud během redukce stupně bude k v absolutní hodnotě větší než jedna, je systém nestabilní a výpočet je možno ukončit.

Příklad 12.29: Určete stabilitu diskrétního obvodu z příkladu 12.22.

Řešení: Ze jmenovatele přenosu řízení máme charakteristickou rovnici obvodu

$$z^4 - 1,655z^3 + 1,012z^2 - 0,323z + 0,047 = 0$$

Routh-Schurův algoritmus pro snižování stupně charakteristické rovnice je následující:

1	-1,655	1,012	v0,323	0,047	
0,047	-0,323	1,012	-1,655	1	$k = -0,047$
-0,002	0,016	-0,048	0,078	-0,047	
0,998	-1,639	0,964	-0,245	0	
-0,245	0,964	-1,639	0,998		$k = 0,245$
-0,06	0,237	-0,403	0,245		
0,938	-1,402	0,561	0		
0,561	-1,402	0,938			$k = -0,598$
-0,335	0,838	-0,561			
0,603	-0,564	0			
-0,564	0,603				$k = 0,935$
-0,527	0,564				
0,076	0				

Protože pro všechna k platí $|k| < 1$ je obvod stabilní.

Diskrétní verze Michajlov-Leonhardova kritéria stability, někdy také označované jako **křivkové kritérium**. Jako u spojitých systémů sestavíme z charakteristické rovnice (4.103)

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

charakteristickou funkci diskrétního regulačního obvodu

$$H(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \quad (12.107)$$

U Michajlov-Leonhardova kritéria pro spojitě obvody jsme do charakteristické funkce $H(s) = a_n s^n + \dots + a_0$ spojitěho obvodu za proměnnou s dosazovali $s = j\omega$, tj. mez stability. Podobně budeme do charakteristické funkce $H(z)$ diskrétního obvodu dosazovat za proměnnou z příslušnou hranici stability a to je jednotková kružnice

$$z = e^{sT} = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T \quad (12.108)$$

Touto substitucí dostaneme funkci bezrozměrné proměnné ωT

$$\begin{aligned}
 H(j\omega T) &= a_n e^{jn\omega T} + \dots + a_1 e^{j\omega T} + a_0 = a_n (\cos n\omega T + j \sin n\omega T) + \dots + a_1 (\cos \omega T + j \sin \omega T) + a_0 = \\
 &= \underbrace{a_n \cos n\omega T + \dots + a_1 \cos \omega T + a_0}_{\text{Re}(\omega T)} + j \underbrace{(a_n \sin n\omega T + \dots + a_1 \sin \omega T)}_{\text{Im}(\omega T)} \quad (12.109)
 \end{aligned}$$

ke které sestrojíme Michajlovovu charakteristiku v komplexní rovině, podobně jako jsme sestrojovali frekvenční charakteristiku k jakémukoliv frekvenčnímu přenosu diskrétního systému. Odvození a podrobnější popis lze najít např. v [Zítek, Hofreiter, Hlava, 2000].

Diskrétní obvod je stabilní, když Michajlovova charakteristika $H(j\omega T)$ začíná na kladné reálné poloose a průvodič H opíše v kladném smyslu úhel $n \pi$ (n krát 180°) (n je stupeň charakteristické rovnice).

Příklad 12.30: Určete stabilitu diskrétního regulačního obvodu, jehož charakteristická rovnice je

$$z^3 - 0,5z^2 + 0,8z - 0,1 = 0$$

Řešení: Do charakteristické funkce obvodu

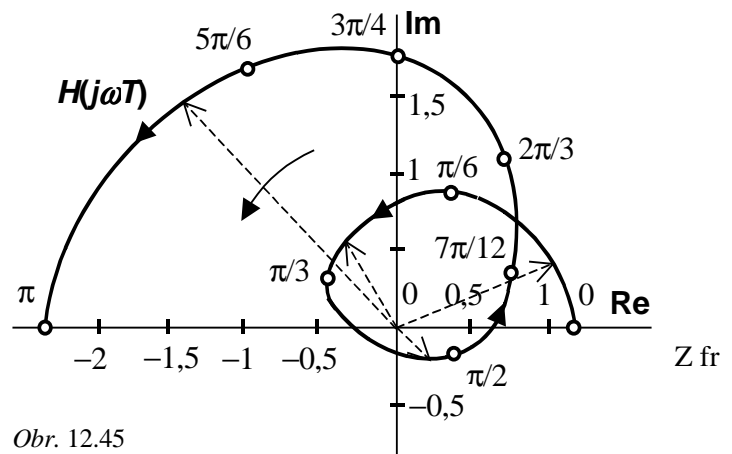
$$H(z) = z^3 - 0,5z^2 + 0,8z - 0,1$$

dosadíme do pravé strany za z vztah (12.108)

$$\begin{aligned}
 H(j\omega T) &= e^{3j\omega T} - 0,5e^{2j\omega T} + 0,8e^{j\omega T} - 0,1 = \\
 &= \cos 3\omega T + j \sin 3\omega T - 0,5(\cos 2\omega T + j \sin 2\omega T) + 0,8(\cos \omega T + j \sin \omega T) - 0,1 = \\
 &= \underbrace{\cos 3\omega T - 0,5 \cos 2\omega T + 0,8 \cos \omega T - 0,1}_{\text{Re}(\omega T)} + j \underbrace{(\sin 3\omega T - 0,5 \sin 2\omega T + 0,8 \sin \omega T)}_{\text{Im}(\omega T)}
 \end{aligned}$$

Bezrozměrnou frekvenci ωT měníme od 0 do π a počítáme Re a Im. Na základě této tabulky zkonstruujeme křivku $H(j\omega T)$ – obr. 12.45. Michajlovova charakteristika $H(j\omega T)$ zde jasně splňuje požadavek stability. Začíná na kladné reálné poloose a průvodič $H(j\omega T)$ opíše pro ωT od 0 do π úhel 3π v kladném smyslu. Diskrétní obvod je stabilní.

ωT [-]	Re	Im
0	1,2	0
$\pi/6$	0,343	0,967
$\pi/3$	-0,45	0,263
$\pi/2$	0,4	-0,2
$7\pi/12$	0,835	0,31
$2\pi/3$	0,75	1,126
$3\pi/4$	0,04	1,78
$5\pi/6$	-1,043	1,833
π	-2,4	0



ekvenčních kritérií se u spojitých systémů nejčastěji používá kritérium Nyquistovo.

Diskrétní verze Nyquistova kritéria je také používána, ale pokud není k dispozici software pro výpočet a konstrukci frekvenčních charakteristik, je výpočet pracný.

Sestrojování frekvenčních charakteristik bylo vysvětleno v kapitole 12.4.4 Frekvenční přenos a charakteristika. Zde můžeme jenom na příkladu demonstrovat využití frekvenční charakteristiky pro vyšetřování stability Nyquistovým kritériem. Jedná se pochopitelně o frekvenční charakteristiku rozpojeného obvodu, sestrojovanou pro bezrozměrnou frekvenci ωT od 0 do π , protože pak je od π do 2π symetrická podle reálné osy a dál se její průběh periodicky opakuje. O stabilitě rozhoduje poloha kritického bodu -1 vzhledem k této charakteristice, stejně jako tomu bylo u spojitých systémů.

Příklad 12.31: Vyšetřete Nyquistovým kritériem stabilitu obvodu z příkladu 12.27.

Řešení: Přenos rozpojeného obvodu je

$$G(z) = \frac{0,154z + 0,094}{z^2 - 0,975z + 0,223}$$

Frekvenční přenos dostaneme dosazením $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$

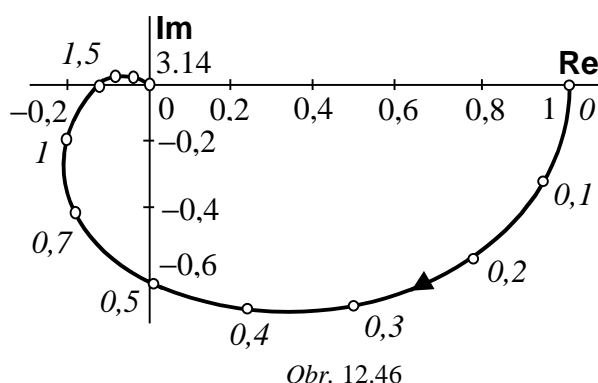
$$G(j\omega T) = \frac{0,154e^{j\omega T} + 0,094}{e^{2j\omega T} - 0,975e^{j\omega T} + 0,223} = \frac{0,154(\cos \omega T + j \sin \omega T) + 0,094}{(\cos 2\omega T + j \sin 2\omega T) - 0,975(\cos \omega T + j \sin \omega T) + 0,223} = \dots$$

Výraz upravíme rozdělením na reálnou a imaginární složku a sestavíme tab. 12.14, z které vykreslíme frekvenční charakteristiku – obr. 12.46.

Kritický bod -1 leží vlevo od této charakteristiky, a proto je obvod stabilní. Výsledek potvrzuje řešení stability vyčíslením kořenů v příkladu 12.27.

ω	Re	Im
0	1	0
0,1	0,92	-0,33
0,2	0,71	-0,57
0,3	0,45	-0,68
0,4	0,22	-0,68
0,7	-0,016	-0,44
1	-0,22	-0,21

ω	Re	Im
1	-0,22	-0,21
1,2	-0,20	-0,11
1,5	-0,15	-0,03
2	-0,09	0,02
2,5	-0,04	0,018
3	-0,03	0,005
3,14	-0,03	0



Tab. 12.14

Body frekvenční

12.7.3 Bilineární transformace

Odvodili jsme si, že leží-li kořeny charakteristické rovnice (12.103)

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

uvnitř jednotkové kružnice, je diskretní obvod stabilní. Leží-li jeden z kořenů vně jednotkové kružnice je obvod nestabilní a poloha na jednotkové kružnici znamená hranici stability. Výpočet kořenů charakteristické rovnice vyššího než druhého stupně je numericky náročný, a proto se stabilita zjišťuje podobně jako u spojitého systému kritérií stability. My jsme si některé z nich uvedli. Jsou to buď diskretní verze kritérií používaných u spojitého systému anebo speciální kritéria pro diskretní systémy. Je však ještě jedna možnost vyšetřování stability diskretních systémů a ta je převést vnitřek jednotkové kružnice na levou komplexní polorovinu a pak používat kritéria známá pro spojité systémy, to je kritéria, která zjišťují, zda kořeny rovnice leží v levé komplexní polorovině.

Mezi rovinou „ s “ v níž leží kořeny charakteristické rovnice spojitého obvodu a rovinou „ z “ s kořeny charakteristické rovnice diskretního obvodu platí vztah (12.7)

$$z = e^{sT}$$

a mezi kořeny v těchto rovinách platí vztah $z_i = e^{s_i T}$. Imaginární osa v rovině „ s “ (hranice stability) se tímto přiřazením transformuje na jednotkovou kružnici v rovině „ z “. Levá komplexní polorovina v rovině „ s “ (stabilní oblast) odpovídá vnitřku jednotkové kružnice v rovině „ z “. Toto tvrzení není matematicky zcela přesné – protože ale tuto transformaci nebudeme používat, není potřeba to upřesňovat.

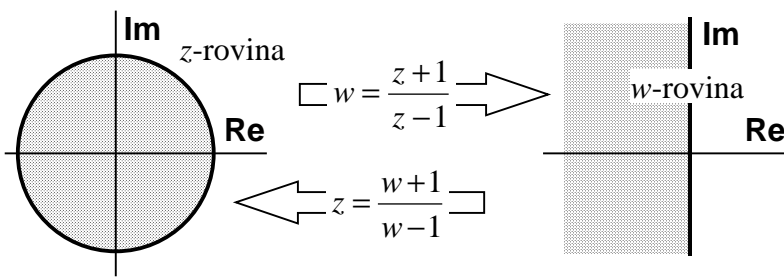
Zobrazení roviny „ z “ do roviny „ s “ umožňuje kontrolovat stabilitu diskretních systémů stejně jako u spojitého a využít tak kritéria, hlavně algebraická, která už jsou známá ze spojitého systému.

Transformace vztahem (12.7) $z = e^{sT}$ a odpovídající inverzní transformace $s = \frac{1}{T} \ln z$

není pro praktické využití příliš vhodná. Proto se používá transformace, která má prakticky stejné vlastnosti, ale je daleko jednodušší. Je to tzv. **bilineární transformace**, definovaná vztahem

$$z = \frac{w+1}{w-1} \tag{12.110}$$

Touto transformací je jednotková kružnice v rovině „ z “ zobrazená jako imaginární osa roviny „ w “ a vnitřek jednotkové kružnice jako levá komplexní polorovina roviny „ w “ (obr. 12.47). Můžete si snadno ověřit, že např. bodu $w_1 = -1$ v levé polorovině roviny „ w “ odpovídá bod $z_1 = 0$ uvnitř jednotkové kružnice



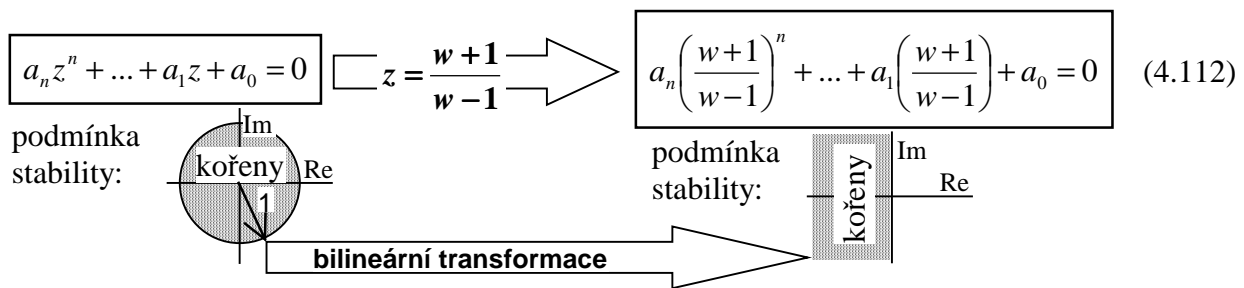
Obr. 12.47

v rovině „ w “, bodu $w_2 = 3$ v pravé komplexní polorovině odpovídá bod $z_2 = 2$ vně jednotkové kružnice a třeba bodu $w_3 = j$ na hraniční imaginární ose odpovídá bod $z_3 = -j$ na hraniční jednotkové kružnici. Na obr. 12.48 je symbolicky ukázána tato transformace včetně transformace inverzní, která je

$$w = \frac{z+1}{z-1} \quad (12.111)$$

což je náhodou formálně velmi podobný vztah původní přímé transformaci (12.110).

Přetřansformujeme-li charakteristickou rovnici (12.103) bilineární transformací, potom protože kořeny původní rovnice měly v případě stability ležet uvnitř jednotkové kružnice, musí **kořeny přetřansformované rovnice (12.111) ležet v levé komplexní polorovině**. To již můžeme zjišťovat



Obr. 12.48

použitím některého ze známých kritérií stability pro spojité systémy, viz obr. 12.48.

Poznámka: Pro úpravu zde musíme často použít matematických vztahů známých jako binomická věta:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 & (a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 & (a \pm b)^5 &= a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5 \end{aligned} \quad (12.112)$$

Příklad 12.32: Určete bilineární transformací stabilitu diskrétního obvodu z příkladu 12.22 eventuálně 12.29.

Řešení: Ze jmenovatele přenosu řízení máme charakteristickou rovnici obvodu

$$z^4 - 1,655z^3 + 1,012z^2 - 0,323z + 0,047 = 0$$

Použijeme bilineární transformaci

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^4 - 1,655\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 1,012\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0,323\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0,047 = 0$$

Po úpravě dostaneme

$$0,081w^4 + 6,476w^3 + 0,948w^2 + 4,458w + 0,081 = 0$$

Lépe vypadá tato rovnice po vydělení koeficientem u nejvyšší mocniny

$$w^4 + 80w^3 + 11,7w^2 + 55w + 1 = 0$$

Hurwitzovým kritériem zjistíme, zda kořeny této rovnice leží v levé komplexní polorovině

$$H_3 = \begin{vmatrix} 80 & 55 & 0 \\ 1 & 11,7 & 1 \\ 0 & 80 & 55 \end{vmatrix} = 42055 > 0$$

Hurwitzův determinant je kladný, a proto kořeny této rovnice leží v levé komplexní polorovině. Proto leží kořeny původní rovnice, z které se tato rovnice transformovala, v jednotkové kružnici. Obvod je tedy stabilní. Výsledek potvrzuje závěr z příkladu 12.29, kde byla stabilita řešena Routh-Schurovým kritériem.

13. FUZZY ŘÍZENÍ

Slovo „fuzzy“ [fazi] znamená česky mlhavý, neurčitý, rozmazaný. V roce 1965 uveřejnil Iránc Lofti A. Zadeh, původem z Azerbajdžánu, profesor elektrotechniky na kalifornské universitě v Berkeley, článek s názvem „Fuzzy sets“ (mlhavé množiny), kterým dal fuzzy množinám jméno, a tím se stal zakladatelem teorie fuzzy množin a fuzzy logiky.

Základní Zadehova myšlenka teorie fuzzy množin spočívá ve vyřešení problému, zdali určitý prvek patří či nepatří do dané množiny. Nikdo nebude na pochybách, že člověk o výšce 205 cm patří do množiny vysokých lidí a naopak nikdo nezapochybuje, že člověk o výšce 150 cm do této množiny nepatří. Co ale člověk o výšce 180 cm? Patří do této množiny?

Nechť každému prvku x množiny A přísluší určitá pravdivostní hodnota, že patří do dané množiny. Tuto pravdivostní hodnotu označme jako stupeň příslušnosti $\mu_A(x)$ daného prvku k dané množině. Prvek, který do dané množiny zcela jistě patří, bude mít funkci příslušnosti $\mu_A(x) = 1$ a prvek, který do dané množiny zcela jistě nepatří, bude mít hodnotu funkce $\mu_A(x) = 0$. Člověk vysoký 205 cm patří do množiny V vysokých lidí s funkcí příslušnosti $\mu_V(x) = 1$ a člověk o výšce 150 cm patří do této množiny se stupněm příslušnosti $\mu_V(x) = 0$. Člověk o výšce 180 cm patří do dané množiny s funkcí příslušnosti např. $\mu_V(x) = 0,72$. O hodnotě funkce příslušnosti samozřejmě nerozhoduje matematika, ale určení je někde úplně jinde.

L.A. Zadeh, dnes označovaný za zakladatele teorie fuzzy množin a fuzzy řízení, poznal, že lidé jsou schopni rozhodovat a řídit i na základě neurčitých, mlhavých a nenumernických informací a přitom mohou dosahovat velmi dobrých výsledků. Zavedl tedy pojem jazykové proměnné, jejíž hodnotou nejsou čísla, ale slova – velký, velmi velký, střední, malý, ...

Teorie fuzzy množin nenašla v tehdejší době velkého pochopení v západním světě. Zato tím více se jí chytli Japonci a Číňané, kteří ji plně využili ve spotřební elektronice, v řízení technologických procesů nejružnějšího druhu, v rozpoznávání obrazů apod. Na pračkách a vysavačích se objevovaly nápisy, které hlásaly, že výrobek má fuzzy řízení. Největší úspěch má fuzzy řízení v oblastech, kde regulované soustavy nejsou dobře popsitelné diferenciálními rovnicemi. Ale i v oblastech, kde popis je dobře znám, zjistíme, že místo klasických PID regulátorů zde jsou fuzzy regulátory. Uvedme nyní základní pojmy fuzzy množin trochu formálněji [Bosc, Kacprzyk, 1995], [Klir, Yuan, 1995], [Novák, 2000]. Předpokládejme, že $U = \{x\}$ je množina prvků z uvažovaného oboru hodnot, kterou nazveme **univerzum**. Pak **fuzzy podmnožina** (nebo zkráceně **fuzzy množina**) A v univerzu U je definována jako množina uspořádaných dvojic $\{(x, \mu_A(x))\}$, kde $x \in U$ a $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$ je **funkce příslušnosti** množiny A ; $\mu_A(x) \in [0,1]$ je **stupeň příslušnosti** prvku x do fuzzy množiny A . (Již z úvodních poznámek je zřejmé, že stanovení stupňů příslušnosti je subjektivní a závislé na kontextu.)

Fuzzy množinu A v konečném univerzu $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ obvykle zapisujeme takto: $A = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n$, kde dvojice $\mu_A(x_i)/x_i$ nazýváme **singletony** a $\mu_A(x_i) \in (0,1]$ (tj. prvky se stupněm příslušnosti 0 nejsou zahrnuty).

Jestliže např. $X = \{1,2, \dots, 10\}$, pak fuzzy množina „velké číslo“ může být vyjádřena zápisem $A =$ „velké číslo“ $= 0,2/6 + 0,5/7 + 0,8/8 + 1/9 + 1/10$, což znamená, že 9 a 10 jsou jistě velká čísla (mají stupeň 1), 8 je velké číslo se stupněm 0,8, ... , a 1,2,...,5 jistě nejsou velkými čísly. Podle konvence singletony se stupněm $\mu_A(\cdot) = 0$ jsou vynechány.

Řekneme, že:

- Fuzzy množina A v univerzu U je **prázdna**, tj. $A = \emptyset$, právě tehdy, když $\mu_A(x) = 0$ pro všechna $x \in U$.
- Dvě fuzzy množiny A, B **se rovnají**, $A=B$, právě tehdy, když $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in U$.
- Fuzzy množina A v U je **podmnožinou** fuzzy množiny B v U , $A \subseteq B$, právě tehdy, když $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall x \in U$.
- **α -řez** fuzzy množiny A v U je definován jako (obyčejná) množina $A_\alpha \subseteq U$ taková, že $A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\forall \alpha \in [0,1]$.
- **Nosič** fuzzy množiny A v U je definován jako množina všech prvků univerza, jejichž stupeň příslušnosti do A je nenulový. Budeme jej značit $\text{Supp}(A)$ a platí $\text{Supp}(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}$.
- **Jádro** fuzzy množiny A v U je definováno jako množina všech prvků univerza, jejichž stupeň příslušnosti do A je roven 1. Budeme jej značit $\text{Ker}(A)$ a platí

$$\text{Ker}(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

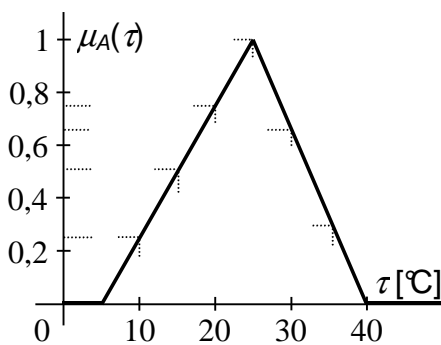
13.1 Fuzzy logika a fuzzy logické funkce

Zatímco hodnotami algebraických proměnných jsou obvykle čísla (speciálně hodnotami logických proměnných v Booleově algebře jsou logická 1 a logická 0), ve fuzzy logice se pracuje s **jazykovými (lingvistickými)** proměnnými, jejichž hodnotami jsou slova nebo věty. Jazyková proměnná je určena: 1) jménem, 2) množinou hodnot, kterých může nabývat (tyto hodnoty se nazývají *termy* a jde o fuzzy množiny), 3) univerzem definovaným pro všechny termy a 4) funkcí, která mapuje slovní hodnoty do hodnot univerza.

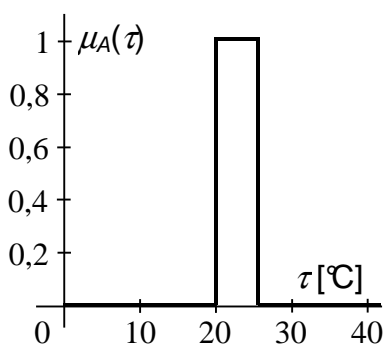
Příkladem může být jazyková proměnná s názvem „věk“ [Jantzen, 1998(a)], jejíž množina termů $T = \{\text{velmi starý, starý, ne tak starý, více méně mladý, mladý, velmi mladý}\}$, univerzum je interval $[0, 120]$ a funkce mapující slovní hodnoty do hodnot univerza mají tvary z obr. 12.8.

teplota τ [°C]	$\mu_A(\tau)$	slovní vyjádření
5	0	určitě ne
10	0,25	asi ne
15	0,5	možná
20	0,75	téměř určitě
25	1,0	zcela jistě
30	0,65	nelze vyloučit
35	0,25	asi ne

Tab. 12.1 Příklad funkce příslušnosti



Obr.12.1



Obr.12.2

Příkladem jazykové proměnné, jejíž hodnotami jsou věty, je „ne moc pomalá rychlost“, „přivři trochu přívod vody“, „je tu moc teplo“.

Fuzzy logika naplňuje toto slovní vyjádření matematickým obsahem, aby tomu rozuměl počítač. Tak je možno matematicky zpracovávat i nepřesná data na rozdíl od logické algebry.

Jestliže τ je teplota v místnosti, pak stupně příslušnosti $\mu_A(\tau)$ pro teploty z univerza U daného rozsahem možných teplot do fuzzy množiny A (příjemná teplota) nabývají hodnot od 0 do 1. Při hodnotě 0 prvek do množiny určitě nepatří, 0,2 znamená asi sotva, 0,5 snad, 0,8 téměř jistě, 1 znamená jistou příslušnost k dané množině. Stupeň příslušnosti $\mu_A(\tau)$ přitom vůbec nesouvisí s pravděpodobností jevu, která také nabývá hodnot 0 až 1, protože nám nic neříká o tom, zda a s jakou pravděpodobností jev nastane. Pouze říká, jak patří konkrétní hodnota do dané množiny.

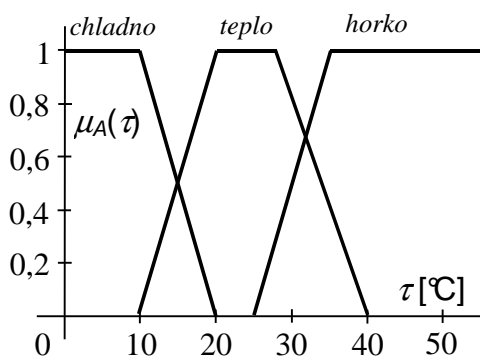
Jako příklad si uveďme už zmiňovanou teplotu v místnosti. Mějme množinu teplot vzduchu označovanou jako „příjemná teplota“. Nemusíme být experti, abychom poznali, že teplota 0°C není zcela určitě příjemná, 10°C je v místnosti sotva příjemná teplota, 20° je téměř určitě příjemná, 25° je zcela určitě příjemná teplota. Můžeme tedy (v jiných případech to musí být expert) stanovit funkci příslušnosti skutečné teploty v místnosti k množině A „příjemná teplota“. Je jasné, že toto vyjádření je subjektivní a že každý člověk by tuto funkci vyjádřil trochu odlišně. Tab. 12.1 vyjadřuje funkci příslušnosti. Graficky vynesena je na obr.12.1 a má trojúhelníkový tvar, který bývá velmi častý.

Pro srovnání si uveďme, jak by to bylo, kdyby byla množina *příjemná teplota* ostrou (ne fuzzy) množinou. Někdo by definoval, že je to teplota v intervalu od 20° do 25° a její funkce příslušnosti by byla buďto 1 v tomto intervalu anebo 0 mimo tento interval. Graf představuje obdélníkovou funkci příslušnosti – obr. 12.2.

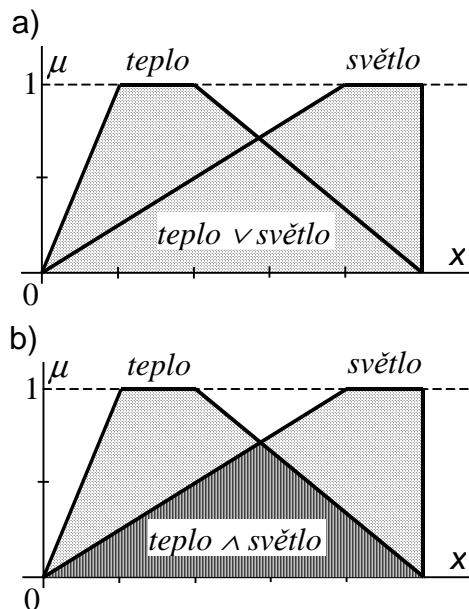
vzdálenost d [km]	$\mu_M(d)$	slovní vyjádření
0 (Kladno)	0	určitě ne
200 (Brno-200 km)	0,25	asi ne
500 (Frankfurt-511)	0,5	možná
700 (Zürich-676)	1,0	zcela určitě
800 (Berlín-803)	1,0	zcela jistě
1100 (Janov-1111)	0,65	nelze vyloučit
1800 (Barcelona-1771)	0,25	asi ne
3000	0	určitě ne

Nejobvykleji se však jako tvar funkce příslušnosti používá lichoběžník a příklad takové množiny s touto lichoběžníkovou funkcí příslušnosti μ je v tab. 12.2 a graficky na obr. 12.3. V tomto příkladu budeme mít množinu měst M , která jsou středně daleko od Prahy. Začneme Kladnem, které je blízko Prahy a má $\mu_M(d) = 0$ a do množiny měst, která jsou středně daleko od Prahy a do množiny M patří se stupněm příslušnosti např. $\mu_M(d) = 0,1$. Pak bude třeba Brno, které do množiny měst středně daleko od Prahy bude náležet s $\mu_M(d) = 0,25$. Následují další města podle uvedené tabulky, z které vidíme, že množině vyhovují se stupněm příslušnosti $\mu_M(d) = 1$ města Zürich (676km), Berlín (803km), Brusel (810km) a Amsterdam (828km). Další města už jsou daleko anebo velmi daleko. To je samozřejmě „evropské“ hodnocení. Kdyby to hodnotil někdo z domácího hlediska, vyšla by mu zcela jiná funkce příslušnosti a z hlediska celosvětového by funkce byla opět zcela jiná. A tak tomu je vždy. Funkce příslušnosti je věc subjektivní a je věcí uživatele.

Tab. 12.2 Příklad funkce příslušnosti



Obr. 12.4



Obr. 12.5

Většinou nevystačíme s jednoduchými fuzzy množinami, ale budeme používat složené množiny. Např. pro vyjádření teploty v místnosti použijeme tři množiny – chladno, teplo, horko – a jimi fuzzy vyjádřená teplota v místnosti je znázorněna v grafu na obr. 12.4. Z grafu můžeme říci např. o teplotě 12°, že patří do množiny „chladno“ se stupněm příslušnosti $\mu = 0,62$, ale současně také do množiny „teplo“ se stupněm příslušnosti $\mu = 0,3$.

Ve fuzzy regulátorech, o kterých budeme mluvit v dalším, se vyskytují složené podmínky, kdy výstupní veličina je dána kombinací několika pravidel a je třeba získat jen jednu funkci příslušnosti pro tuto výstupní veličinu. U fuzzy regulátorů se této operaci říká **inference** (provádí ji inferenční zařízení regulátoru). Platí pro ni základní zákony Booleovy algebry při respektování váhy funkce příslušnosti u jednotlivých proměnných.

Definujme nyní základní operace s fuzzy množinami, a sice sjednocení, průnik a doplněk. Logické operátory pro disjunkci a konjunkci budeme v této kapitole značit symboly \vee (disjunkce, logické „nebo“) a \wedge (konjunkce, logické „a“) aby nedocházelo k nedorozumění.

Sjednocení dvou fuzzy množin A a B v univerzu U je fuzzy množina $C = A \cup B$ v U , jejíž funkce příslušnosti je definována vztahem:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \forall x \in U, \quad (12.1)$$

kde “ \vee ” je maximum (odpovídá disjunkci - OR).

Průnik dvou fuzzy množin A a B v univerzu U je fuzzy množina $C = A \cap B \vee U$, jejíž funkce příslušnosti je definována takto:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \forall x \in U, \quad (12.2)$$

kde “ \wedge ” je minimum (odpovídá konjunkci - AND).

Doplňěk \bar{A} fuzzy množiny A v univerzu U , je fuzzy množina v U s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U, \quad (12.3)$$

(odpovídá to negaci - NOT).

Na obr. 12.5a, resp. 12.5b jsou graficky znázorněny operace sjednocení, resp. průniku fuzzy množin „teplo“ a „světlo“ s využitím vztahů (12.1) a (12.2).

Ve fuzzy logice neplatí analogie k zákonu vyloučeného třetího a zákonu logického rozporu, což je zapříčiněno tím, že některé prvky do množiny částečně patří a částečně patří do jejího doplňku. Proto např. průnik fuzzy množiny a jejího doplňku s ohledem na vztah (12.2) není prázdný, každý z prvků x ovšem do tohoto průniku náleží se stupněm příslušnosti rovným nanejvýše 0,5.

Definice (12.1), (12.2) a (12.3), kdy při výpočtu funkce příslušnosti sjednocení využíváme operaci maxima, u průniku operaci minima a u negace doplňěk do 1, nejsou jediné, existují i další. Na místě průniku můžeme použít jakoukoliv **triangulární normu** (nebo zkráceně **t-normu**) a na místě sjednocení jakoukoliv **triangulární konormu** (**t-konormu**, která je také označována jako **s-norma**).

Fuzzy průnik/t-norma je binární operace na jednotkovém intervalu $i: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, která pro všechny $a, b, c \in [0,1]$ splňuje následující 4 vlastnosti:

- (1) $i(0,0) = 0, i(a,1) = i(1,a) = a$ (omezenost)
- (2) jestliže $b \leq c$, pak $i(a,b) \leq i(a,c)$ (monotónnost)
- (3) $i(a,b) = i(b,a)$ (komutativnost)
- (4) $i(a,i(b,c)) = i(i(a,b),c)$ (asociativnost)

Fuzzy sjednocení/t-konorma (s-norma) je binární operace na jednotkovém intervalu $u: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, která pro všechny $a, b, c \in [0,1]$ splňuje následující 4 vlastnosti:

- (1) $u(1,1) = 1, u(a,0) = u(0,a) = a$ (omezenost)
- (2) jestliže $b \leq c$, pak $u(a,b) \leq u(a,c)$ (monotónnost)
- (3) $u(a,b) = u(b,a)$ (komutativnost)
- (4) $u(a,u(b,c)) = u(u(a,b),c)$ (asociativnost)

V tab. 12.3 jsou uvedeny základní t-normy a t-konormy (s-normy). V 1. řádku tabulky jsou nejčastěji používané, které odpovídají vztahům (12.1) a (12.2).

t-normy	t-konormy (s-normy)
standardní průnik $i(a,b) = \min(a,b)$	standardní sjednocení $u(a,b) = \max(a,b)$
algebraický součin $i(a,b) = ab$	algebraický součet $u(a,b) = a + b - ab$
omezená diference $i(a,b) = \max(0, a+b-1)$	omezený součet $u(a,b) = \min(1, a+b)$
drastický průnik $i(a,b) = \begin{cases} a, & \text{jestliže } b = 1 \\ b, & \text{jestliže } a = 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$	drastické sjednocení $u(a,b) = \begin{cases} a, & \text{jestliže } b = 0 \\ b, & \text{jestliže } a = 0 \\ 1, & \text{jinak} \end{cases}$

Tab. 12.3

Nyní zavedeme fuzzy relaci a další související pojmy, které budeme v dalším potřebovat.

Jestliže U a V jsou dvě univerza, pak *fuzzy relace* R je definována jako fuzzy množina v kartézském součinu $U \times V$, charakterizovaném jeho funkcí příslušnosti $\mu_R: U \times V \rightarrow [0,1]$; $\mu_R(x,y) \in [0,1]$ vyjadřuje sílu relace mezi $x \in U$ a $y \in V$.

Je zřejmé, že pro konečná a početně malá univerza U a V lze fuzzy relaci znázornit maticí.

Jestliže R je fuzzy relace v $U \times V$ a S je fuzzy relace ve $V \times W$, pak jejich (*max-min*) *kompozice* je fuzzy relace $R \circ S$ v $U \times W$ definovaná takto:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)] \quad (12.4)$$

Poznámka:

Funkce $\sup\{x\}$ je supremum množiny prvků $\{x\}$, což je nejmenší číslo které je větší nebo rovno všem prvkům z množiny $\{x\}$. Např. $\sup\left\{\frac{n}{n+1}, n \text{ je přirozené číslo}\right\} = 1$. U konečných množin je supremum rovno maximu.

Zatím jsme se zabývali binárními relacemi, obdobně jako u klasických množin je možné je snadno rozšířit na n -ární relace a modifikovat pojmy, které z nich vycházejí [Jura, 2003], [Vysoký, 1996].

Klíčovou operací ve fuzzy řízení je operace fuzzy implikace, která je základem pravidel ve znalostní bázi.

V klasické logice můžeme pro vyjádření implikace použít následující ekvivalentní vyjádření.

$$p \rightarrow q = \overline{p} + q = \overline{p} + (p \cdot q) = (\overline{p} \cdot \overline{q}) + q = \max\{x \in \{0,1\} \mid (p \cdot x) \leq q\} \quad (12.5)$$

Jestliže interpretujeme konjunkci, disjunkci a negaci pomocí t -normy, t -konormy a fuzzy doplňku, pak jejich kombinací dostaneme velký počet různých fuzzy implikací. Někteří autoři, např. Mamdani, navrhli ještě další fuzzy implikace, které nejsou odvozeny ze vztahů (12.5), a tak jejich celkový počet dnes dosahuje několik desítek, podle práce [Jantzen, 1998(a)] jich je 72.

Nechť A je fuzzy množina v univerzu U a B je fuzzy množina v univerzu V . Následující přehled udává vztahy pro funkce příslušnosti nejznámějších fuzzy implikací $R(A,B)$:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad \text{Kleene-Dienes} \quad (12.6)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\} \quad \text{Lukasiewicz} \quad (12.7)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \max\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)], 1 - \mu_A(x)\} \quad \text{Zadeh (Willmott)} \quad (12.8)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)\} \quad \text{stochastická implikace} \quad (12.9)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \quad \text{Reichenbach} \quad (12.10)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad \text{Mamdani} \quad (12.11)$$

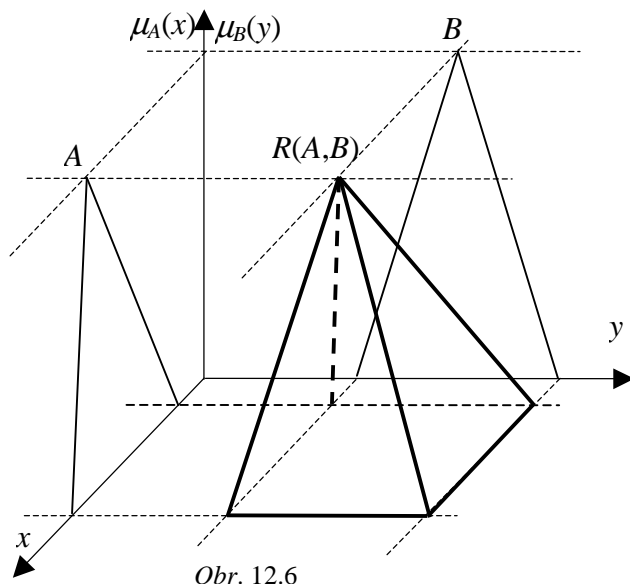
$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \quad \text{Larsen} \quad (12.12)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \mu_A(x) \leq \mu_B(y); \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{Rescher-Gaines} \quad (12.12)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \mu_A(x) \leq \mu_B(y); \\ \mu_B(y), & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{Gödel} \quad (12.14)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \begin{cases} \min\{1, \mu_A(x)/\mu_B(y)\}, & \text{jestliže } \mu_B(y) \neq 0; \\ 1, & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{Goguen} \quad (12.15)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \mu_A(x) < 1 \text{ nebo } \mu_B(y) = 1; \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{Sharp(Gorgen)} \quad (12.16)$$



Obr. 12.6

Na obr. 12.6 je znázorněna fuzzy množina A v univerzu U , fuzzy množina B v univerzu V a Mamdaniho fuzzy implikace $R(A,B)$.

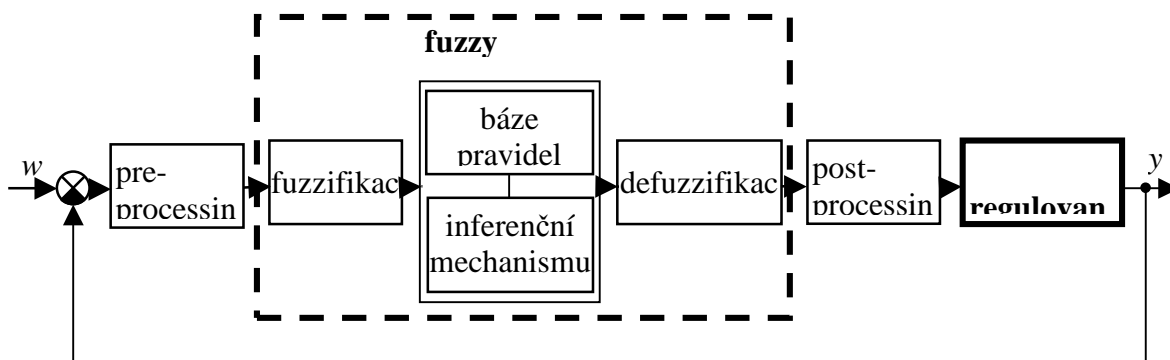
5.1 Fuzzy řízení

Základní zapojení regulačního obvodu s fuzzy regulátorem znázorňuje obr. 12.7 [Jantzen, 1998(b)]. Vstupem fuzzy regulátoru většinou jsou údaje změřené nějakým přístrojem a jde o jednoznačné údaje a ne o jazyková vyjádření. Protože však ve fuzzy logice pracujeme s hodnotami z intervalu $[0,1]$, je nutné nejdříve tyto údaje na vstupu fuzzy regulátoru do tohoto oboru hodnot transformovat, tuto transformaci nazýváme **normalizací**. Jestliže

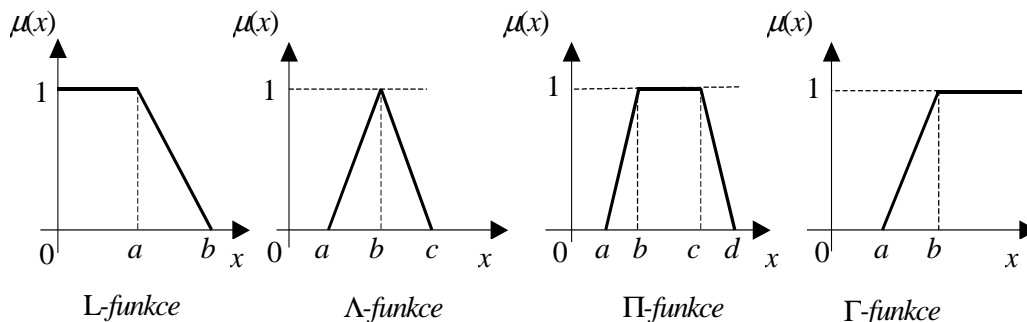
víme, že sledovaná veličina x se může pohybovat v rozsahu daném dolní mezí d a horní mezí h , pak její aktuální hodnotu x_a snadno převedeme na hodnotu v intervalu $[0, 1]$ pomocí vztahu

$$\frac{x_a - d}{h - d} \quad (12.17)$$

Naměřené hodnoty se normalizují v bloku předzpracování (**preprocessing**), kde se kromě toho také signál filtruje, aby se odstranil vliv šumu.



V bloku **fuzzifikace**, který je prvním blokem fuzzy regulátoru, se každá naměřená hodnota



Obr. 12.8

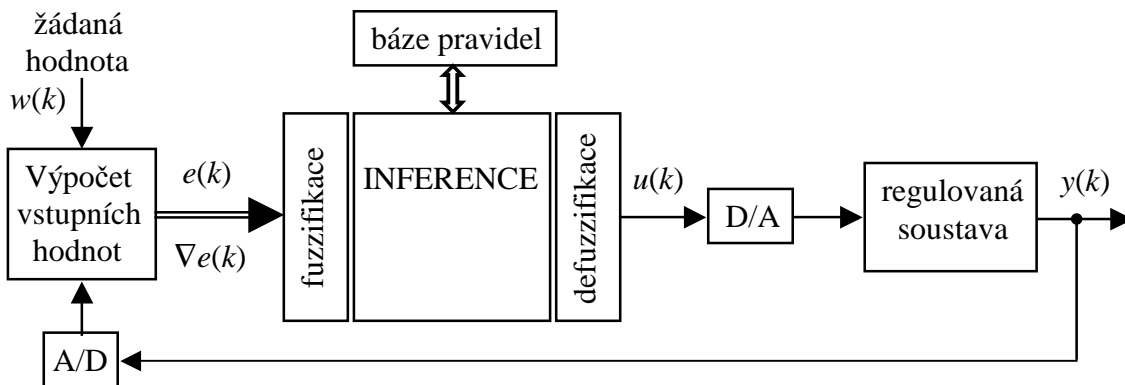
konvertuje na stupeň příslušnosti jedné nebo několika funkcí příslušnosti fuzzy množin odpovídajících termům jazykové proměnné. Pro jednoduchost volíme pro funkce příslušnosti nejčastěji funkce z obr. 12.8., které se skládají z lineárních úseků a snadno je popíšeme vztahy (12.18)-(12.21):

$$L(x, a, b) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x < a \\ \frac{b-x}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{pro } x > b \end{cases}, \quad \Lambda(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{pro } b < x \leq c \\ 0 & \text{pro } x > c \end{cases} \quad (12.18), (12.19)$$

$$\Pi(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{pro } b < x \leq c \\ \frac{c-x}{d-c} & \text{pro } c < x \leq d \\ 0 & \text{pro } x > d \end{cases}, \quad \Gamma(x, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{pro } x > b \end{cases} \quad (12.20), (12.21)$$

V dalším kroku určí fuzzy regulátor na základě znalostí experta slovní hodnoty akčních veličin (např. akční zásah bude velký kladný). To je funkce **fuzzy regulátoru**. V závěrečné etapě se převede slovní vyjádření na konkrétní číselné hodnoty veličin, a to je **defuzifikace**.

Blokové schéma fuzzy řízení je na obr. 12.7. Fuzzy řízení je výhodné zejména tam, kde neznáme matematický popis regulované soustavy, ale které dovede člověk řídit. Lze určit hodnotu výstupu, aniž tak známe vzorce mezi vstupem a výstupem. Také dává dobré výsledky v případech, kdy regulovaná soustava je podstatně nelineární a klasickým řízením se zvládá velmi špatně anebo vůbec.



Obr. 12.9

13.2 Fuzzy regulátor

Základní struktura fuzzy regulátoru v diskretním regulačním obvodu je na obr. 12.9. Jde o mírně modifikovanou verzi z obr. 12.7, zde navíc doplněnou o analogově/digitální (A/D) a digitálně/analogové (D/A) převodníky. V bloku *Výpočet vstupních hodnot* jsou vypočítávány proměnné, které pak jsou používány na vstupu fuzzy regulátoru. Jako vstupní proměnné jsou použity regulační odchylka $e(k)$ a její první diference $\nabla e(k)$.

$$e(k) = w(k) - y(k) \quad (12.22)$$

$$\nabla e(k) = e(k) - e(k-1) \quad (12.23)$$

Obecný tvar pravidla vytvářejícího fuzzy regulátor je

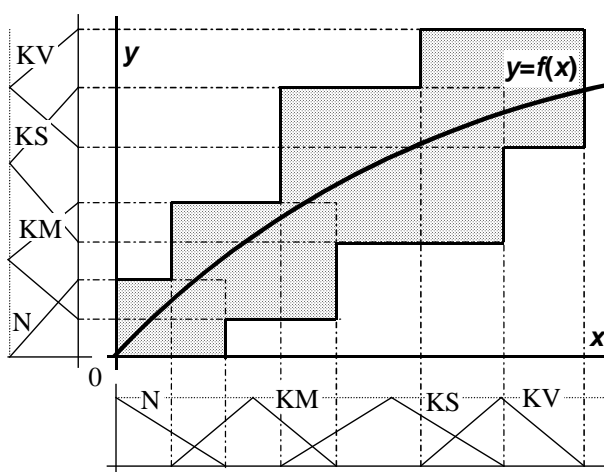
Jestliže (fuzzy výrok) **pak** (fuzzy výrok)

nebo častěji v anglické verzi **IF** (fuzzy výrok) **THEN** (fuzzy výrok)

Tuto podmínku označujeme jako pravidlo, pravidlo jestliže-pak anebo IF-THEN pravidlo. První fuzzy výrok se nazývá **antecedent** (předpoklad) pravidla, druhý fuzzy výrok jako **konsekvent** (důsledek) pravidla. Antecedent bývá často složený fuzzy výrok, kde jsou jednotlivé dílčí výroky vázány logickými spojkami, například:

Jestliže/IF je odchylka velká záporná a diference odchylky velká kladná **pak/THEN** bude diference akčního zásahu záporná střední. Místo **a** zde může být **AND**, rovnost vyjádřená slovem „je“ může být také vyjádřena anglickým „is“ nebo matematickým symbolem „=“.

fuzzy hodnota	česká zkratka	angl. zkratka
velká záporná	ZV	NB
střední záporná	ZS	NM
malá záporná	ZM	NS
záporná blízká nule	ZN	NZ
nulová	N	Z
kladná blízká nule	KN	PZ
malá kladná	KM	PS
střední kladná	KS	PM
velká kladná	KV	PB



Obr. 12.10

Tab. 12.4 Typické fuzzy hodnoty

Pro regulační účely se rozdělí interval možných hodnot regulační odchylky (diference odchylky) na příslušný počet fuzzy množin. Jejich české zkratky jsou uvedeny v tab. 12.4 spolu s všeobecně užívaným anglickým označením.

Budeme např. chtít popsat určitou funkční závislost $y=f(x)$ pomocí pravidel a budeme se pro jednoduchost pohybovat jen v kladných hodnotách. V tom případě rozdělíme obor možných hodnot proměnné x např. na 4 částečně se překrývající úseky, které budeme považovat za definiční obory čtyř fuzzy množin – obr. 12.10.

Analogickým způsobem budeme definovat čtyři fuzzy množiny na oboru možných hodnot proměnné y . Funkční závislost budeme aproximovat sjednocením čtyř relací, které odpovídají např. čtyřem následujícím pravidlům:

- IF** $x=N$ **THEN** $y=N$ **IF** $x=KS$ **THEN** $y=KS$
IF $x=KM$ **THEN** $y=KM$ **IF** $x=KV$ **THEN** $y=KV$

Každému pravidlu bude nyní odpovídat jistý definiční obor relace, který vznikne jako průnik antecedentu a konsekventu podle obr. 12.10. Sjednocením definičních oborů jednotlivých relací vznikne pás, který velmi hrubě aproximuje předpokládanou funkční závislost. Tomuto způsobu aproximace říkáme lingvistická aproximace.

Konkrétní podoba pravidel pro regulátor může být rozepsána ve tvaru pravidel IF-THEN anebo uložena v tabulce. Antecedent může mít tvar složené podmínky obsahující logické operace AND, OR, NOT. U fuzzy regulátorů, kde pracujeme s veličinami $e(k)$ a $\nabla e(k)$ a obě veličiny sledujeme současně, budou proto pravidla rozepsána následovně

IF $e(k)=ZO$ **AND** $\nabla e(k)=ZO$ **THEN** $u(k)=ZO$

IF $e(k)=NS$ **AND** $\nabla e(k)=PB$ **THEN** $u(k)=PM$
IF $e(k)=PS$ **AND** $\nabla e(k)=NB$ **THEN** $u(k)=NM$...atd.

$\Delta e \setminus e$	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
PB	ZO	PS	PM	PB	PB	PB	PB
PM	NS	ZO	PS	PM	PB	PB	PB
PS	NM	NS	ZO	PS	PM	PB	PB
ZO	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NS	NB	NB	NM	NS	ZO	PS	PM
NM	NB	NB	NB	NM	NS	ZO	PS
NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	ZO

Tab. 12.5 Tabulka pravidel fuzzy PD regulátoru

Těmto pravidlům odpovídá tab. 12.5. Při sedmi pravidlech pro každou vstupní veličinu dostáváme celkem 49 pravidel. V literatuře můžeme najít několik variant takových tabulek.

Toto byla realizace **fuzzy PD regulátoru**, neboť odpovídal rovnici:

$$u(k) = k_P e(k) + k_D \nabla e(k) \quad (12.24)$$

U **fuzzy P regulátoru** by se realizoval podstatně jednodušší vztah

$$u(k) = k_P e(k) \quad (12.25)$$

kde se jedná o jednodimenzionální závislost a pravidla jsou typu **IF** $e(k)=KM$ **THEN** $u(k)=KM$.

Aproximaci můžeme provést již dříve popsaným způsobem podle obr. 12.10. Nemusí to být vždycky lineární regulátor, někdy má dokonce jako nelineární fuzzy regulátor lepší výsledky. Ale používanějším fuzzy regulátorem je PD regulátor.

Fuzzy PS regulátor se realizuje podobně jako PD regulátor. Většinou se nesnažíme aproximovat klasický vztah pro PS regulátor, ale jeho diferenci. Tím dostaneme na výstupu fuzzy regulátoru diferenci akční veličiny, se kterou potom jako s ostrou veličinou provádíme sumaci. Jedná se tedy o aproximaci vztahu

$$\nabla u(k) = k_P \nabla e(k) + k_I e(k) \quad (12.26)$$

Pravidla v tomto případě budou ve tvaru

IF $e(k)=ZM$ **AND** $\nabla e(k)=N$ **THEN** $\nabla u(k)=KM$

U **fuzzy PSD regulátoru** aproximujeme vztah

$$u(k) = k_P e(k) + k_I \sum e(k) + k_D \nabla e(k) \quad (12.27)$$

anebo vztah

$$\nabla u(k) = k_P \nabla e(k) + k_I e(k) + k_D \nabla^2 e(k) \quad (12.28)$$

Dostáváme se na třídimenzionální bázi, kdy počet pravidel narůstá ze 49 na 343, a to je již velmi rozměrná báze. Ztrácí se fyzikální význam pohledu. Nastavování báze pravidel se stává obtížným úkolem, stejně tak jako nastavení celého PSD regulátoru.

Konkrétní realizace jednotlivého pravidla spočívá ve způsobu, jak je stanovena úhrnná míra splnění podmínky a jak je vytvořen vztah mezi levou a pravou stranou pravidla (myslí se mezi levou a pravou stranou od spojky THEN, tj. jak je realizována ona spojka THEN). Spojka THEN přenáší míru splnění podmínkové části pravidla na konsekvent, který pak může být aplikovatelný buď zcela (podmínka splněna na 100 %) nebo do určitého stupně odpovídajícího míře splnění podmínky (podmínka splněna částečně) nebo vůbec ne (podmínka nesplněna).

Klasický dvouhodnotový přístup umožňuje stanovit míru splnění částečné podmínky symbolicky zapsané v podmínce

$$\mathbf{IF} \ x_1=A_1 \ \mathbf{AND} \ x_2=A_2 \ \mathbf{AND} \ \dots \ \mathbf{THEN} \ y=B$$

jako „ $x_i=A_i$ “ pouze jako buď splněno nebo nesplněno. Stupeň příslušnosti může být buď 0 nebo 1. Je-li však A_i fuzzy množina, připouští se částečné náležení x_i do A_i . Stupeň příslušnosti prvku do fuzzy množiny je z intervalu $[0, 1]$. Částečné splnění podmínky na levé straně pravidla znamená také částečnou aplikovatelnost pravé strany – tedy konsekventu.

Stanovením vztahů mezi vstupními a výstupními hodnotami fuzzy regulátoru jsou formulována pravidla, která dále slouží pro určování řídicích akcí jak pro definované situace, tak pro situace, které ve znalostní bázi explicitně popsány nejsou. Fuzzy regulace pak probíhá následovně. V určitém časovém okamžiku jsou k dispozici skutečné (naměřené) ostré hodnoty všech vstupních proměnných x_i v levé části pravidla. Tyto se liší od hodnot předem definovaných v pravidlech. Míru shody je nutno zjistit fuzzifikací pro každou vstupní proměnnou. Dále je zapotřebí stanovit celkovou míru splnění podmínkové části pravidla a pomocí této hodnoty *inferovat* (vyvodit) míru aplikovatelnosti příslušného konsekventu.

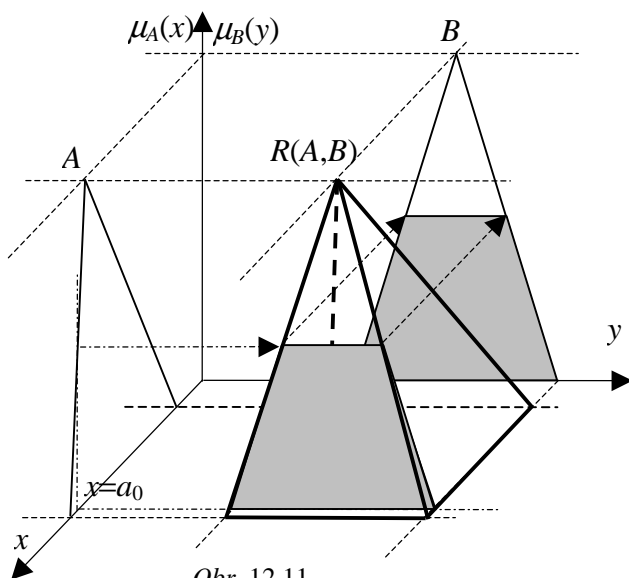
Konsekvent reprezentuje potřebnou řídicí akci. Protože má obecně formu fuzzy množiny, je nutné provést jeho transformaci – tzv. *defuzzifikaci* – na ostrou skalární hodnotu (např. velikost regulačního napětí ve voltech), neboť přibližné hodnotě ve formě fuzzy množiny regulační prvek nerozumí.

Inference

Blok inferenčního mechanismu je stěžejní částí fuzzy regulačního obvodu. Jestliže výstupní veličina je konsekventem několika pravidel, je třeba je nějakým způsobem *agregovat* (sloučit) a získat tak jen jednu funkci příslušnosti pro tuto výstupní veličinu.

Uvažujme např. dvě pravidla, kde antecedent bude konjunkcí dvou podmínek, a v konsekventech obou pravidel je tatáž výstupní proměnná. Chceme-li zpracovat tato pravidla, musíme se rozhodnout, jak budeme interpretovat: 1. samotná pravidla, 2. jejich jednotlivé složky a 3. jak je budeme agregovat jejich konsekventy.

1. Odpověď na první otázku je jednoznačná – konstrukce **IF** <fuzzy výrok 1> **THEN** <fuzzy výrok 2> je fuzzy implikací, to však s sebou samozřejmě nese nutnost zvolit typ fuzzy implikace.
2. Konjunkci v antecedentu realizujeme *t*-normou a tu musíme opět volit. (Obdobně bychom museli volit *t*-konormu (*s*-normu) pro disjunkci v antecedentu).
3. Pro agregaci konsekventů volíme disjunkci a z toho tedy plyne, že musíme volit *t*-konormu (*s*-normu). (Agregace disjunkcí je analogií disjunktivní normální formy pro řádky pravdivostní tabulky, kde výstupní logická proměnná nabývá hodnoty logická 1.)



Obr. 12.11

Zvolme Mamdaniho implikaci, konjunkci (AND) realizovanou jako minimum a disjunkci realizovanou jako maximum. Ze vztahu (12.11) víme, že Mamdaniho implikace používá operaci minima. Přestože jde o jednoduchou operaci, v grafickém vyjádření je jejím výsledkem trojrozměrný objekt, jak dokládá obr. 12.6.

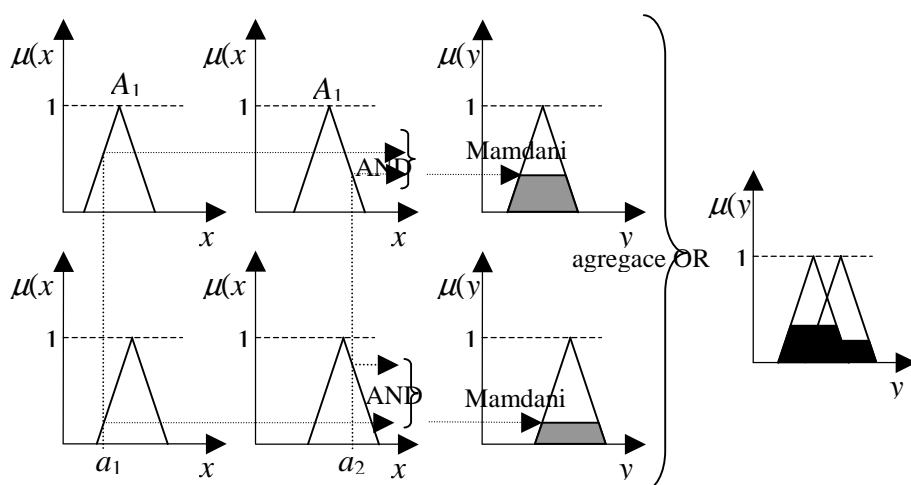
Spouštěcím mechanismem výpočtu je změření přesné hodnoty vstupní proměnné, resp. změření přesných hodnot vstupních proměnných. Na obr. 12.11 je vidět, jak se změní výsledek Mamdaniho implikace z obr. 12.6, jestliže vstupní proměnná x bude mít hodnotu a_0 .

V obr. 12.11 je vidět, že volba $x=a_0$ ve 4-bokém jehlanu vytkne lichoběžník, který je pak promítnut na univerzum V proměnné y . Výpočet je možné tak zjednodušit na rovinná zobrazení.

Vraťme se nyní k našemu příkladu dvou pravidel ve tvaru

IF $x_1=A_{11}$ **AND** $x_2=A_{12}$ **AND THEN** $y=B_1$
IF $x_1=A_{21}$ **AND** $x_2=A_{22}$ **AND THEN** $y=B_2$,

kde $A_{11}, A_{12}, B_1, A_{21}, A_{22}, B_2$ jsou termy s trojúhelníkovou funkcí příslušnosti, je použita Mamdaniho implikace, minimum pro konjunkci a maximum pro agregační disjunkci. Jsou-li naměřeny přesné hodnoty $x_1=a_{10}$ a $x_2=a_{20}$, dostáváme výsledek podle obr. 12.12.



Obr.12.12

Defuzzifikace

Defuzzifikace je proces dávající na výstupu fuzzy regulátoru ostrou hodnotu čili proces, kdy se určité fuzzy množině přiřazuje ostrá hodnota. Způsob, jak získat tuto hodnotu, není jednoznačný a existuje mnoho defuzzifikačních metod, převážně empirických

Výsledkem inference je jediná funkce příslušnosti pro akční veličinu. Její převedení na ostrou hodnotu polohy regulačního orgánu je úkol defuzzifikace.

Jedna z nejrozšířenějších metod se nazývá *metoda středu plochy* COA (center of area) nebo také *metoda těžiště* COG (center of gravity). Defuzzifikovaná ostrá hodnota y_0 odpovídá souřadnici těžiště plochy vzniklé inferencí. Spočítáme ji podle vztahu (12.29).

$$y_0 = \frac{\int_U y \mu_A(y) dy}{\int_U \mu_A(y) dy}, \quad (12.29)$$

kde U je spojitě univerzum.

Z podobného vzorce (12.30) spočítáme výslednou hodnotu akčního zásahu i pro diskrétní univerzum.

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \mu_A(y_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A(y_i)} \quad (12.30)$$

Nevýhodou výpočtu metodou středu plochy je, že nezohledňuje překrytí jednotlivých ploch. Proto se používá řada dalších způsobů výpočtu defuzzifikované hodnoty, např. *metoda středu součtů*, *metoda prvního maxima* a *výšková metoda*, viz např. [Jura, 2003].

V obecném schématu fuzzy regulačního obvodu za blokem defuzzifikace ještě následuje blok dodatečného zpracování (**postprocessing**), který z intervalu normalizovaných hodnot provádí konverzi do oboru hodnot, s nimiž pracuje regulovaná soustava.

13.3 Využití fuzzy regulátoru

Tam, kde postačí klasický PID nebo PSD regulátor, je zbytečné používat fuzzy regulátor. Typickou oblastí nasazení fuzzy regulátoru jsou soustavy s výraznými nelinearitami, s dopravním zpožděním, soustavy jejichž parametry se v čase mění nebo soustavy obtížně či vůbec neidentifikovatelné. Výhodné jsou také u mnohorozměrových regulačních obvodů.

Podrobnosti k ladění fuzzy PID regulátoru lze najít např. v [Hampel, Wagenknecht, Chaker, 2000], [Jantzen, 1998(c)] a [Pivoňka, 1998].

14. Literatura:

1. Alexík, M., Juríček, J., Miček, J.: *Základy automatického řízení*. Vydavatelství ŽU v Žiline, Žilina 1998
2. Balátě, J.: *Vybrané statě z automatického řízení*: VUT Brno, 1996
3. Balátě, J.: *Automatické řízení*: Nakladatelství BEN, Praha 2005
4. Bobál, V., Vašek, V.: *Teorie automatického řízení I*: ES VUT FT Zlín, Brno, 1989
5. Forsythe, W., Goodall, R.M.: *Digital Control. Fundamentals, Theory and Practice*. MacMillan Education Ltd. London, 1991
6. Dušek, F.: *MATLAB a SIMULINK úvod do používání*, Univerzita Pardubice, 2000
7. Hanuš, B., Balda, M.: *Základy technické kybernetiky I. část*, VŠST Liberec, ČVUT Praha, 1989
8. Hanuš, B., Balda, M.: *Základy technické kybernetiky II. Část*: VUT Brno, 1981
9. Hanuš, B., Olehla, M., Modrlák, O.: *Číslíková regulace technologických procesů*. VUTIM Brno, 2000
10. Hampel, R., Wagenknecht, M., Chaker, N.: *Fuzzy Control. Physica-Verlag, Heidelberg, 2000*.
11. Chudý, V., Palenčár, R., Kureková, E., Halaj, M.: *Meranie technických veličín*. - 1. vyd. - Bratislava : STU v Bratislave, 1999. - 688 s.
12. Isermann, R.: *Digital Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
13. Janeček, J., Modrlák, O.: *Základy technické kybernetiky – Příklady*, VŠST Liberec, 1990
14. Jantzen, J.: *Tuning of Fuzzy Controllers. Technical Report No. 98-H 871 (fpid)*, Technical University of Denmark, Department of Automation, Lyngby, 1998.
15. Jura, P.: *Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování*. VUTIUM, Brno, 2003.
16. Kachaňák, A.: *Teória automatického riadenia II*, SVŠT Bratislava, 1987
17. Kalaš, D., Jucha, I.: *Matlab/Simulink a Control System Toolbox*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1996
18. Kubík, S., Kotek, Z., Strejc, V., Štecha, J.: *Teorie automatického řízení I, Lineární a nelineární systémy*, SNTL, ALFA Praha, 1982
19. Kubík, S., Kotek, Z., Šalomon, M.: *Teorie regulace, I - lineární regulace*, SNTL, ALFA Praha, 1968
20. Kubík, S., Kotek, Z., Šalomon, M.: *Teorie regulace, II - nelineární regulace*, SNTL, ALFA Praha, Bratislava, 1969
21. Mikleš, J., Fikar, M.: *Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov 2*. Vydavateľstvo STU v Bratislavě, Bratislava 2004
22. Noskivič, P.: *Modelování a identifikace systémů*. Montanex, Ostrava 1999
23. Olehla, M., Němeček, S.: *Základy aplikované kybernetiky*, TU Liberec 2002, 2004
24. Olehla, M., Věchet, V., Olehla, J.: *Řešení úloh matematické statistiky ve Fortranu*, Nadas Praha, 1981
25. Oppelt, N.: *Příručka regulační techniky*, SNTL Praha, 1967
26. Prokop, R., Matuš, R., Prokopová, Z.: *Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy*. FAI UTB ve Zlíně, Zlín 2006
27. Pivoňka, P.: *Fuzzy PI/PD/PID regulátory. Automatizace*, roč. 41, č. 5, 1998.
28. Raven, H.R.: *Automatic Control Engineering*. McGraw-Hill, New York, 1995.
29. Švec, J., Kotek, Z. a kol.: *Teorie automatického řízení*, SNTL Praha, 1969
30. Švarc, I.: *Automatizace – Automatické řízení*. VUT Brno 2002
31. Švarc, I.: *Automatizace. Automatické řízení*. CERM s.r.o. Brno 2007
32. Šulc, B., Vítečková M.: *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Vydavatelství ČVUT Praha, 2004.
33. Šalomon M.: *Matematika pro regulaci a automatizaci*. Praha SNTL 1957
34. Švarc, I., Šeda, M., Vítečková, M.: *Automatické řízení*. Akademické nakladatelství CERM, VUT v Brně, Brno 2007
35. Vavřín, P.: *Teorie řízení I, 2. část*, ES VUT Brno, 1983
36. Vavřín, P.: *Teorie dynamických systémů*, ES VUT Brno, 1989
37. Vavřín, P., Zelina, F.: *Automatické řízení počítačem*, SNTL Praha, 1977
38. Víteček, A.: *Matematické metody automatického řízení*, VŠB - FSE Ostrava, 1988, 2006
39. Víteček, A.: *Teorie organizace a řízení*, VŠB Ostrava, 1988
40. Víteček, A.: *Teorie řízení*, VŠB Ostrava, 1986
41. Víteček, A., Smutný, L., Kusyn, J.: *Teorie řízení I, II, III*, VŠB - FSE Ostrava, 1983
42. Zítek, P.: *Simulace dynamických systémů*, SNTL Praha, 1990
43. <http://fyzmatik.pise.cz/28949-eulerova-rovnost.html>
44. <http://www.parnistroj.cz/web.org/schema.html>

15. Příloha

15.1 Definiční vztahy a základní vlastnosti Laplaceovy transformace

	Definiční vzorce
1	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$
2	$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds$
	Linearita
3	$\mathcal{L}\{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)\} = a_1X_1(s) \pm a_2X_2(s)$
	Podobnost obrazů
4	$\mathcal{L}\{ax(at)\} = X\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
	Konvoluce v časové oblasti
5	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t x_2(t-\tau)x_1(\tau)d\tau\right\} = X_1(s)X_2(s) = X_2(s)X_1(s)$
	Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)
6	$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-as} X(s), a \geq 0$
	Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)
7	$\mathcal{L}\{x(t+a)\} = e^{as} \left[X(s) - \int_0^a x(t)e^{-st} dt \right], a \geq 0$
	Násobení exponenciální funkcí v časové oblasti
8	$\mathcal{L}\{x(t)e^{\mp at}\} = X(s \pm a)$
	Derivace v časové oblasti
9	Derivace 1.řádu $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$
10	Derivace n -tého řádu $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} x(0)}{dt^{i-1}}$
	Derivace v oblasti komplexní proměnné

11	$\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}$
	Integrál v časové oblasti
12	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} X(s)$

	Hodnota integrálu
13	$\int_0^\infty x(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} X(s)$
14	$\int_0^\infty tx(t) dt = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dX(s)}{ds}$
	Obraz periodické funkce
15	$\mathcal{L}\{x(t) + x(t-a) + x(t-2a) + \dots\} = X(s) \frac{1}{1 - e^{-as}} \quad a - \text{perioda, } a > 0$
	Počáteční hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
16	$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
	Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)
17	$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$
	Operace podle nezávislého parametru
18	$\mathcal{L}\{x(t, a)\} = X(s, a)$
19	$\mathcal{L}\{\lim_{a \rightarrow a_0} x(t, a)\} = \lim_{a \rightarrow a_0} X(s, a)$
20	$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial x(t, a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial X(s, a)}{\partial a}$
21	$\mathcal{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} x(t, a) da\right\} = \int_{a_1}^{a_2} X(s, a) da$
	Zpětná transformace pomocí reziduí

22	$x(t) = \sum_i \operatorname{res} [X(s)e^{st}] = \sum_i \left\{ \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}} [(s - s_i)^{r_i} X(s)e^{st}] \right\}$ <p>r_i – násobnost i-tého pólu obrazu</p> <p>$n = \sum_i r_i$ – stupeň mnohočlenu ve jmenovateli obrazu</p>
----	--

15.2 Slovník Laplaceovy transformace

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
1	s	$\dot{\delta}(t)$
2	1	$\delta(t)$
3	$\frac{1}{s}$	$\eta(t)$
4	$\frac{1}{s^n}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
5	$\frac{s}{T_1 s + 1}$	$\alpha_1 [\delta(t) - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}], \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
6	$\frac{1}{T_1 s + 1}$	$\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
7	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)}$	$1 - e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
8	$\frac{1}{s^2(T_1 s + 1)}$	$\frac{1}{\alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - 1) + t, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
9	$\frac{b_1 s + 1}{s(T_1 s + 1)}$	$1 + (\alpha_1 b_1 - 1)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
10	$\frac{b_1 s + 1}{s^2(T_1 s + 1)}$	$C_1 (1 - e^{-\alpha_1 t}) + t, \quad C_1 = b_1 - \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$

11	$\frac{s}{(T_1s + 1)^2}$	$\alpha_1^2(1 - \alpha_1 t)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
12	$\frac{1}{(T_1s + 1)^2}$	$\alpha_1^2 t e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
13	$\frac{1}{s(T_1s + 1)^2}$	$1 - (1 + \alpha_1 t)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
14	$\frac{1}{s^2(T_1s + 1)^2}$	$t - \frac{2}{\alpha_1} + \left(\frac{2}{\alpha_1} + t\right)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
15	$\frac{b_1s + 1}{(T_1s + 1)^2}$	$\alpha_1^2 [b_1 + (1 - \alpha_1 b_1)t]e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
16	$\frac{b_1s + 1}{s(T_1s + 1)^2}$	$1 - [1 + \alpha_1(1 - \alpha_1 b_1)t]e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
17	$\frac{b_1s + 1}{s^2(T_1s + 1)^2}$	$t + C_1 - (C_1 - C_2 t)e^{-\alpha_1 t}$ $C_1 = b_1 - \frac{2}{\alpha_1}, \quad C_2 = 1 - \alpha_1 b_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
18	$\frac{s}{(T_1s + 1)^n}, \quad n = 2, 3, \dots$	$\alpha_1^n \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} (n-1 - \alpha_1 t)e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
19	$\frac{1}{(T_1s + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\alpha_1^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
20	$\frac{1}{s(T_1s + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$	$1 - e^{-\alpha_1 t} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^i \frac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
21	$\frac{1}{s^2(T_1s + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$	$t - \frac{n}{\alpha_1} + e^{-\alpha_1 t} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^{i-1} (n-i) \frac{t^i}{i!}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}$
	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
22	$\frac{s}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, \quad T_1 \neq T_2$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{1}{T_1(T_2 - T_1)}, \quad C_2 = \frac{1}{T_2(T_2 - T_1)}$

23	$\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1 \neq T_2$	$C_1(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), C_1 = \frac{1}{T_1 - T_2}, \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$
24	$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, C_2 = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$
25	$\frac{1}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1 \neq T_2$	$t - C_0 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, C_0 = T_1 + T_2$ $C_1 = \frac{T_1^2}{T_1 - T_2}, C_2 = \frac{T_2^2}{T_1 - T_2}, \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$
26	$\frac{b_1s+1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1 \neq T_2$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{T_1 - b_1}{T_1(T_1 - T_2)}, C_2 = \frac{T_2 - b_1}{T_2(T_1 - T_2)}$
27	$\frac{b_1s+1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$ $C_1 = \frac{b_1 - T_1}{T_1 - T_2}, C_2 = \frac{T_2 - b_1}{T_1 - T_2}$
28	$\frac{b_1s+1}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1 \neq T_2$	$t + C_0 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, C_0 = -T_1 - T_2 + b_1$ $C_1 = \frac{(b_1 - T_1)T_1}{T_2 - T_1}, C_2 = \frac{(T_2 - b_1)T_2}{T_2 - T_1}, \alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$
29	$\frac{s}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, n = 2, 3, \dots$ $T_i - \text{různé}$	$-\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, C_i = \frac{T_i^{n-3}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}, \alpha_i = \frac{1}{T_i}$
30	$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, n = 2, 3, \dots$ $T_i - \text{různé}$	$\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, C_i = \frac{T_i^{n-2}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}, \alpha_i = \frac{1}{T_i}$
31	$\frac{1}{s \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, n = 2, 3, \dots$ $T_i - \text{různé}$	$1 - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}, C_i = \frac{T_i^{n-1}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}, \alpha_i = \frac{1}{T_i}$

	Obraz $X(s)$	Originál $x(t)$
32	$\frac{1}{s^2 \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}$, $n = 2, 3, \dots$ T_i – různé	$t - C_0 + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$, $\alpha_i = \frac{1}{T_i}$ $C_i = \frac{T_i^n}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$, $C_0 = \sum_{i=1}^n T_i$
33	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
34	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
35	$\frac{s}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}$, $0 \leq \xi_0 < 1$	$-C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi)$, $C_1 = \frac{1}{\omega T_0^3}$, $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$ $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma}$
36	$\frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}$, $0 \leq \xi_0 < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin \omega t$, $C_1 = \frac{1}{\omega T_0^2}$, $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$, $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}$
37	$\frac{1}{s(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)}$, $0 \leq \xi_0 < 1$	$1 - C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$, $C_1 = \frac{1}{\omega T_0}$, $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$ $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma}$
38	$\frac{1}{s^2(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)}$, $0 \leq \xi_0 < 1$	$t - C_0 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + 2\varphi)$, $C_0 = 2\xi_0 T_0^2$ $C_1 = \frac{1}{\omega}$, $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$, $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma}$
39	$\frac{b_1 s + 1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}$, $0 \leq \xi_0 < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$, $C_1 = \frac{1}{\omega T_0^3} \sqrt{(1 - 2b_1 \gamma) T_0^2 + b_1^2}$ $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}$, $\omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega b_1}{1 - \gamma b_1}$

40	$\frac{b_1 s + 1}{s(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)},$ $0 \leq \xi_0 < 1$	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi), \quad C_1 = \frac{1}{\omega T_0^2} \sqrt{(1 - 2b_1 \gamma) T_0^2 + b_1^2}$ $\gamma = \frac{\xi_0}{T_0}, \quad \omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 - \xi_0^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega T_0^2}{b_1 - \gamma T_0^2}$
----	---	---

b_1, b_2 – reálné konstanty, $T_i > 0, i = 0, 1, \dots$

Název	Automatické řízení
Autor	Prof. Ing. Miroslav Olehla, CSc., TU Liberec Ing. Slavomír Němeček, TU Liberec Doc. Ing. Ivan Švarc, CSc., VUT Brno
Vydavatel	Technická univerzita v Liberci
Určeno	pro studenty III. ročníku fakulty strojní
Vyšlo	2011
Povoleno	Rektorátem TU v Liberci dne 5.5.2011, čj. RE36/11
Počet stran	194
Obrázky	36
Vydání	druhé
Číslo publikace	55-036-11