Aplikovaná kybernetika

Laplaceova transformace
Obrazový přenos

Ing. Maryna Garan

Laplaceova transformace (1)

- Laplaceova transformace – “portál” mezi reálným světem a světem Laplace
- Má určité vlastnosti
- Existuje přímá a zpětná Laplaceova transformace
- V kybernetice se neprovádí přímo, používá se slovník Laplaceovych transformací

Laplaceova transformace (2)

Přímá Laplaceova transformace:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Zpětná Laplaceova transformace:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s) \cdot e^{st} ds$$

Laplaceova transformace (3)

- Naším cílem je zjistit, jak můžeme popsat chování dynamického systému ve světě Laplace.
- Chování dynamických systémů v reálném světě se popisuje pomocí následující diferenciální rovnice:

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y^I(t) + a_0 \cdot y(t) =$$

$$= b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \cdot u^I(t) + b_0 \cdot u(t)$$

- Aplikujeme Laplaceovu transformaci na tuto diferenciální rovnici. Abychom zvládli tuto operaci provést, musíme vědět:

  1 vlastnost Laplaceove transformace

  1 pravidlo ze Slovníku Laplaceovych transformací

Obrazový přenos (1)

Lineární vlastnost Laplaceovy transformace:

$$L\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = L\{a \cdot f(t)\} + L\{b \cdot g(t)\} =$$

$$= a \cdot L\{f(t)\} + b \cdot L\{g(t)\}$$

Laplaceova transformace derivace

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \cdots - s \cdot f^{(n-2)} - f^{(n-1)}$$

<u>Počáteční podmínky jsou nulové!</u>

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s)$$

Obrazový přenos (2)

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y^I(t) + a_0 \cdot y(t) =$$

$$= b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \cdot u^I(t) + b_0 \cdot u(t)$$

$$L\{a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y^I(t) + a_0 \cdot y(t)\} =$$

$$= L\{b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \cdot u^I(t) + b_0 \cdot u(t)\}$$

$$L\{a_n \cdot y^{(n)}(t)\} + L\{a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t)\} + \cdots + L\{a_1 \cdot y^I(t)\} + L\{a_0 \cdot y(t)\} =$$

$$= L\{b_m \cdot u^{(m)}(t)\} + L\{b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t)\} + \cdots + L\{b_1 \cdot u^I(t)\} + L\{b_0 \cdot u(t)\}$$

Obrazový přenos (3)

$$a_n \cdot L\{y^{(n)}(t)\} + a_{n-1} \cdot L\{y^{(n-1)}(t)\} + \cdots + a_1 \cdot L\{y^I(t)\} + a_0 \cdot L\{y(t)\} =$$

$$= b_m \cdot L\{u^{(m)}(t)\} + b_{m-1} \cdot L\{u^{(m-1)}(t)\} + \cdots + b_1 \cdot L\{u^I(t)\} + b_0 \cdot L\{u(t)\}$$

$$a_n \cdot s^n \cdot Y(s) + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot Y(s) + \cdots + a_1 \cdot s \cdot Y(s) + a_0 \cdot Y(s) =$$

$$= b_m \cdot s^m \cdot U(s) + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \cdot U(s) + \cdots + b_1 \cdot s \cdot U(s) + b_0 \cdot U(s)$$

$$Y(s) \cdot (a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0) =$$

$$= U(s) \cdot (b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0)$$

Obrazový přenos (4)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} \cdot (a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0) =$$

$$= \frac{U(s)}{U(s)} \cdot (b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Způsoby zápisu obr. přenosu (1)

1. Polynomiální tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}$$

n řád systému

$n \geq m$ (podmínka fyzikální realizovatelnosti)

$K = \frac{b_0}{a_0}$ zesílení systému

$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0$ charakteristický polynom

$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$ charakteristická rovnice

Způsoby zápisu obr. přenosu (2)

2. Zápis pomocí kořenů

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - n_1) \cdot (s - n_2) \cdot \ldots \cdot (s - n_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \ldots \cdot (s - p_n)}$$

$n_1, n_2, \ldots, n_m$ nuly systému

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ póly systému

$K = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(-n_1) \cdot (-n_2) \cdot \ldots \cdot (-n_m)}{(-p_1) \cdot (-p_2) \cdot \ldots \cdot (-p_n)}$ zesílení systému

Způsoby zápisu obr. přenosu (3)

3. Zápis pomocí časových konstant

$$G(s) = \frac{b_0 \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot (\tau_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (\tau_m s + 1)}{a_0 \cdot (T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (T_n s + 1)}$$

$K = \frac{b_0}{a_0}$ zesílení systému

$\tau_i = -\frac{1}{n_i}$

$T_i = -\frac{1}{p_i}$

časové konstanty systému