Aplikovaná kybernetika

Rozklad na parciální zlomky

Ing. Maryna Garan

Proč to děláme?

Známe Laplaceuv obraz výstupu z dynamického systému

$$Y(s) = \frac{polynom\ 1}{polynom\ 2}$$

Naším cílem je zjistit originál výstupu z dynamického systému

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = ?$$

Rozdělíme Y(s) na parciální zlomky

$$Y(s) = \frac{polynom\ 1}{polynom\ 2} = parc.zl.1 + parc.zl.2 + \cdots + parc.zl.k$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{polynom\ 1}{polynom\ 2}\right\}$$

$$\Downarrow$$

Složitě se hledá

$$y(t) = L^{-1}\{parc.zl.1\} + L^{-1}\{parc.zl.2\} + \cdots + L^{-1}\{parc.zl.k\}$$

$$L^{-1}\{parc.zl.1\}$$
$$L^{-1}\{parc.zl.2\}$$
$$\ldots$$
$$L^{-1}\{parc.zl.k\}$$

$\Rightarrow$ Jednoduše se hledá ve slovníku Laplaceovych transformací

Jak se zlomek rozkládá? (1)

- Přirovnáme polynom 2 (jmenovatel) k nule
- Zjistíme kořeny vzniklé rovnice
- Rozdělíme polynom na násobence
- Zapíšeme výsledek rozkladu ve tvaru součtu parciálních zlomků
- Dopočítáme čitatele u každého parciálního zlomku

Jak se zlomek rozkládá? (2)

Při výpočtu kořenů jmenovatele mohou nastat tyto případy:

1) Reálné kořeny
2) Násobné kořeny (stejné)
3) Komplexně sdružené kořeny
4) Kombinace kořenů z 1), 2) a 3)

Jak dopočítat koeficienty v čitatelích parciálních zlomků? (1)

1) Metoda neurčitých koeficientů
2) Metoda přímého hledání (pomocí limit)
3) Výpočet dosazováním

Jak dopočítat koeficienty v čitatelích parciálních zlomků? (2)

1) Metoda neurčitých koeficientů

- Přivedeme parciální zlomky na společného jmenovatele
- Přirovnáme čitatel zjištěného zlomku k čitateli původního zlomku.
- Přeskupíme koeficienty podle mocniny s, jejíž násobkem jsou
- Přirovnáme koeficienty (popřípadě polynomy) z levé a pravé části pro odpovídající mocniny s.
- Vyřešíme vzniklou soustavu rovnic

Jak dopočítat koeficienty v čitatelích parciálních zlomků? (3)

2) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

- Každý z koeficientů zjistíme pomocí dalšího vzorce:

$$K_i = \lim_{s \to s_i} (s - s_i) \cdot Y(s)$$

- Pokud pracujeme s násobným kořenem, budeme mít několik zlomků se stejným kořenem, a tak i několik koeficientů $Kn_1, Kn_2, \dots, Kn_k$ (k je násobnost kořenu)

$$Kn_1 = \lim_{s \to s_i} (s - s_i)^k \cdot Y(s)$$

$$Kn_2 = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left(\lim_{s \to s_i} (s - s_i)^k \cdot Y(s) \right)$$

$$Kn_3 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left(\lim_{s \to s_i} (s - s_i)^k \cdot Y(s) \right)$$

$$\dots$$

$$Kn_k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{ds^{(k-1)}} \left(\lim_{s \to s_i} (s - s_i)^k \cdot Y(s) \right)$$

Jak dopočítat koeficienty v čitatelích parciálních zlomků? (4)

3) Výpočet dosazováním

- Přivedeme parciální zlomky na společného jmenovatele
- Přirovnáme čitatel zjištěného zlomku k čitateli původního zlomku.
- Zvolíme si jakékoliv hodnoty s_i. Nejvhodnější volbou jsou hodnoty, odpovídající kořenům jmenovatelů. Počet hodnot je shodný s počtem hledaných koeficientů.
- Zvolené hodnoty postupně dosadíme do rovnice, čímž postupně zjistíme koeficienty

Příklady

Reálné kořeny (1)

$$Y(s) = \frac{5s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3$$

$$Y(s) = \frac{5s + 1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$$Y(s) = \frac{5s + 1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 3}$$

$$A = ?$$
$$B = ?$$
$$C = ?$$

Reálné kořeny (2)

1) Metoda neurčitých koeficientů

$$Y(s) = \frac{5s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} =$$

$$= \frac{A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2) = 5s+1$$

$$A(s^2+5s+6) + B(s^2+4s+3) + C(s^2+3s+2) = 5s+1$$

$$s^2(A+B+C) + s^1(5A+4B+3C) + s^0(6A+3B+2C) = s^1 \cdot 5 + s^0 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} s^2&: \quad A+B+C = 0 \\ s^1&: \quad 5A+4B+3C = 5 \\ s^0&: \quad 6A+3B+2C = 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 9 \\ C &= -7 \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{9}{s+2} + \frac{-7}{s+3}$$

Reálné kořeny (3)

2) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

$$Y(s) = \frac{5s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = \lim_{s\to -1}\left[(s+1)\cdot\frac{5s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = \lim_{s\to -1}\left[\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)}\right] = -2$$

$$B = \lim_{s\to -2}\left[(s+2)\cdot\frac{5s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = \lim_{s\to -2}\left[\frac{5s+1}{(s+1)(s+3)}\right] = 9$$

$$C = \lim_{s\to -3}\left[(s+3)\cdot\frac{5s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = \lim_{s\to -3}\left[\frac{5s+1}{(s+1)(s+2)}\right] = -7$$

$$Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{9}{s+2} + \frac{-7}{s+3}$$

Reálné kořeny (4)

3) Výpočet dosazováním

$$Y(s) = \frac{5s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} =$$

$$= \frac{A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2) = 5s+1$$

$$\begin{array}{lcr}
s=-1 & A\cdot 1\cdot 2 + B\cdot 0\cdot 2 + C\cdot 0\cdot 1 = 5\cdot(-1)+1 & A=-2 \\
s=-2 & A\cdot 0\cdot 1 + B\cdot(-1)\cdot 1 + C\cdot(-1)\cdot 0 = 5\cdot(-2)+1 & B=9 \\
s=-3 & A\cdot(-1)\cdot 0 + B\cdot(-2)\cdot 0 + C\cdot(-2)\cdot(-1) = 5\cdot(-3)+1 & C=-7
\end{array}$$

$$Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{9}{s+2} + \frac{-7}{s+3}$$

Násobný kořen (1)

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = -2, s_2 = -2, s_3 = -2$$

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+2)^3}$$

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+2)^3} = \frac{A}{(s+2)^3} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = ?$$
$$B = ?$$
$$C = ?$$

Násobný kořen (2)

1) Metoda neurčitých koeficientů

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+2)^3} = \frac{A}{(s+2)^3} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2} =$$

$$= \frac{A + B(s+2) + C(s+2)^2}{(s+2)^3}$$

$$A + B(s+2) + C(s+2)^2 = 3s^2 + 2s + 1$$

$$A + B(s+2) + C(s^2 + 4s + 4) = 3s^2 + 2s + 1$$

$$s^2(C) + s^1(B + 4C) + s^0(A + 2B + 4C) = s^2 \cdot 3 + s^1 \cdot 2 + s^0 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} s^2&: \quad C = 3 \\ s^1&: \quad B + 4C = 2 \\ s^0&: \quad A + 2B + 4C = 1 \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} A &= 9 \\ B &= -10 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{9}{(s+2)^3} + \frac{-10}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}$$

Násobný kořen (3)

2) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+2)^3} = \frac{A}{(s+2)^3} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \lim_{s \to -2} \left[(s+2)^3 \cdot \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+2)^3} \right] = \lim_{s \to -2} [3s^2 + 2s + 1] = 9$$

$$B = \lim_{s \to -2} \left[\frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} (3s^2 + 2s + 1) \right] = \lim_{s \to -2} [6s + 2] = -10$$

$$C = \lim_{s \to -2} \left[\frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} (3s^2 + 2s + 1) \right] = \lim_{s \to -2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds} (6s + 2) \right] = \lim_{s \to -2} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \right] = 3$$

$$Y(s) = \frac{9}{(s+2)^3} + \frac{-10}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}$$

Násobný kořen (4)

3) Výpočet dosazováním

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+2)^3} = \frac{A}{(s+2)^3} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2} =$$

$$= \frac{A + B(s+2) + C(s+2)^2}{(s+2)^3}$$

$$A + B(s+2) + C(s+2)^2 = 3s^2 + 2s + 1$$

$$\begin{array}{ll} s = -2 & A + B \cdot 0 + C \cdot 0^2 = 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 \\ s = 0 & A + B \cdot 2 + C \cdot 2^2 = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 \\ s = -1 & A + B \cdot 1 + C \cdot 1^2 = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A = 9 & A = 9 \\ A + 2B + 4C = 1 & B = -10 \\ A + B + C = 2 & C = 3 \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{9}{(s+2)^3} + \frac{-10}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}$$

Komplexně sdružené kořeny (1)

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$$

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = -1 + 2j, s_2 = -1 - 2j$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1+2j)(s+1-2j)} = \frac{A}{s+1+2j} + \frac{B}{s+1-2j}$$

$$A = ?$$
$$B = ?$$
$$C = ?$$

Komplexně sdružené kořeny (2)

1) Metoda neurčitých koeficientů

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1+2j)(s+1-2j)} = \frac{A}{s+1+2j} + \frac{B}{s+1-2j} =$$

$$= \frac{A(s+1-2j) + B(s+1+2j)}{(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

$$A(s+1-2j) + B(s+1+2j) = s+3$$

$$s^1(A+B) + s^0(A - 2Aj + B + 2Bj) = s^1 \cdot 1 + s^0 \cdot 3$$

$$\begin{array}{lrl} s^1: & A + B = 1 & \qquad A = 0{,}5 + 0{,}5j \\ s^0: & A - 2Aj + B + 2Bj = 3 & \qquad B = 0{,}5 - 0{,}5j \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{0{,}5 + 0{,}5j}{s+1+2j} + \frac{0{,}5 - 0{,}5j}{s+1-2j}$$

Komplexně sdružené kořeny (3)

2) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1+2j)(s+1-2j)} = \frac{A}{s+1+2j} + \frac{B}{s+1-2j}$$

$$A = \lim_{s \to -1-2j} \left[(s+1+2j) \cdot \frac{s+3}{(s+1+2j)(s+1-2j)} \right] =$$

$$= \lim_{s \to -1-2j} \left[\frac{s+3}{(s+1-2j)} \right] = 0{,}5 + 0{,}5j$$

$$B = \lim_{s \to -1+2j} \left[(s+1-2j) \cdot \frac{s+3}{(s+1+2j)(s+1-2j)} \right] =$$

$$= \lim_{s \to -1+2j} \left[\frac{s+3}{(s+1+2j)} \right] = 0{,}5 - 0{,}5j$$

$$Y(s) = \frac{0{,}5 + 0{,}5j}{(s+1+2j)} + \frac{0{,}5 - 0{,}5j}{(s+1-2j)}$$

Komplexně sdružené kořeny (4)

3) Výpočet dosazováním

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1+2j)(s+1-2j)} = \frac{A}{s+1+2j} + \frac{B}{s+1-2j} =$$

$$= \frac{A(s+1-2j) + B(s+1+2j)}{(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

$$A(s+1-2j) + B(s+1+2j) = s+3$$

$$s = -1-2j \quad A \cdot (-4j) + B \cdot 0 = -1+2j+3 \quad A = 0{,}5 + 0{,}5j$$
$$s = -1+2j \quad A \cdot 0 + B \cdot 4j = -1-2j+3 \quad B = 0{,}5 - 0{,}5j$$

$$Y(s) = \frac{0{,}5+0{,}5j}{(s+1+2j)} + \frac{0{,}5-0{,}5j}{(s+1-2j)}$$

Kombinace kořenů. Příklad 1 (1)

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s}$$

$$s \cdot (s^3 + 4s^2 + 5s + 2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = -2, s_2 = -1, s_3 = -1, s_4 = 0$$

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s(s+2)(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s(s+2)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}$$

$$A = ?$$
$$B = ?$$
$$C = ?$$
$$D = ?$$

Kombinace kořenů. Příklad 1 (2)

1) Metoda neurčitých koeficientů

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}$$

$$= \frac{A(s+2)(s+1)^2 + Bs(s+1)^2 + Cs(s+2) + Ds(s+2)(s+1)}{s(s+2)(s+1)^2}$$

$$A(s+2)(s+1)^2 + Bs(s+1)^2 + Cs(s+2) + Ds(s+2)(s+1) = 2s+1$$

$$A(s+2)(s^2+2s+1) + Bs(s^2+2s+1) + C(s^2+2s) + Ds(s^2+3s+2) = 2s+1$$

$$A\,(s^3+4s^2+5s+2) + B(s^3+2s^2+s) + C(s^2+2s) + D(s^3+3s^2+2s) = 2s+1$$

$$s^3(A+B+D) + s^2(4A+2B+C+3D) + s^1(5A+B+2C+2D) + s^0(2A) =$$

$$= s^3 \cdot 0 + s^2 \cdot 0 + s^1 \cdot 2 + s^0 \cdot 1$$

$$\begin{array}{lcl}
s^3: & A+B+D=0 & A=0{,}5 \\
s^2: & 4A+2B+C+3D=0 & B=1{,}5 \\
s^1: & 5A+B+2C+2D=2 & C=1 \\
s^0: & 2A=1 & D=-2
\end{array}$$

$$Y(s) = \frac{0{,}5}{s} + \frac{1{,}5}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+1}$$

Kombinace kořenů. Příklad 1 (3)

2) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}$$

$$A = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{2s+1}{s(s+2)(s+1)^2}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{2s+1}{(s+2)(s+1)^2}\right] = 0{,}5$$

$$B = \lim_{s\to -2}\left[(s+2) \cdot \frac{2s+1}{s(s+2)(s+1)^2}\right] = \lim_{s\to -2}\left[\frac{2s+1}{s(s+1)^2}\right] = 1{,}5$$

$$C = \lim_{s\to -2}\left[(s+1)^2 \cdot \frac{2s+1}{s(s+2)(s+1)^2}\right] = \lim_{s\to -2}\left[\frac{2s+1}{s(s+2)}\right] = 1$$

$$D = \lim_{s\to -1}\left[\frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{2s+1}{s(s+2)}\right)\right] = \lim_{s\to -2}\left[\frac{(2s+1)^I \cdot (s^2+2s) - (2s+1)\cdot(s^2+2s)^I}{(s^2+2s)^2}\right] =$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)^I = \frac{g^I \cdot f - g \cdot f^I}{f^2}$$

$$= \lim_{s\to -1}\left[\frac{2\cdot(s^2+2s) - (2s+1)\cdot(2s+2)}{(s^2+2s)^2}\right] = -2$$

$$Y(s) = \frac{0{,}5}{s} + \frac{1{,}5}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+1}$$

Kombinace kořenů. Příklad 1 (4)

3) Výpočet dosazováním

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}$$

$$= \frac{A(s+2)(s+1)^2 + Bs(s+1)^2 + Cs(s+2) + Ds(s+2)(s+1)}{s(s+2)(s+1)^2}$$

$$A(s+2)(s+1)^2 + Bs(s+1)^2 + Cs(s+2) + Ds(s+2)(s+1) = 2s+1$$

$$\begin{array}{rr} s=0 & A\cdot 2\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 0 = 2\cdot 0 + 1 \\ s=-1 & A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot(-1)\cdot 1 + D\cdot 0 = 2\cdot(-1) + 1 \\ s=-2 & A\cdot 0 + B\cdot(-2)\cdot(-1)^2 + C\cdot 0 + D\cdot 0 = 2\cdot(-2)+1 \\ s=1 & A\cdot 3\cdot 2^2 + B\cdot 1\cdot 2^2 + C\cdot 1\cdot 3 + D\cdot 1\cdot 3\cdot 2 = 2\cdot 1 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2A = 1 & A = 0{,}5 \\ -C = -1 & C = 1 \\ -2B = -3 & B = 1{,}5 \\ 12A + 4B + 3C + 6D = 3 & D = -2 \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{0{,}5}{s} + \frac{1{,}5}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+1}$$