1. OBRAZOVÝ PŘENOS

Chování dynamických systémů se běžně popisuje pomocí diferenciálních rovnic. S takovým popisem jste se často setkávali v rámcích jiných předmětů. Když ale chceme analyzovat dynamické systémy a jejích vzájemné propojení, musíme s těmi rovnicemi umět zacházet (řešit, kombinovat apod.). Tyto operace nejsou zrovna moc jednoduché. Ke zjednodušení těchto úloh nám poslouží Laplaceova transformace. Je to matematická transformace vyvinuta Simonem Pierrem de Laplacem ještě na začátku19. století k řešení diferenciálních rovnic. Hlavním trikem Laplaceovy transformace je její schopnost převádět diferenciální rovnice na rovnice algebraické. Největšího rozkvětu a uznání transformace získala právě s rozvojem teorie automatického řízení. Prokázala se jako účinný a poměrně jednoduchý nástroj nejenom k řešení diferenciálních rovnic, ale také pro zacházení se soustavami systémů, které se pomocí těchto rovnic popisují.

Základní postup použití Laplaceovy transformace při analýze dynamických systému je následující. Uvažujme dynamický systém s jedním vstupem a jedním výstupem (dynamické systémy samozřejmě můžou obsahovat více vstupů a/nebo výstupu, ale budeme uvažovat tu nejjednodušší variantu). Uvažujme také, že známe diferenciální rovnici popisující chování tohoto systému (zatím předpokládejme, že odněkud jsme ji získali) a druh použitého vstupního signálu. Pokud bychom chtěli zjistit odezvu dynamického systému (výstupní signál) na určité buzení (vstupní signál), měli bychom podle klasického přístupu dosadit vstupní signál a případně i jeho derivace do diferenciální rovnice a výslednou rovnici pak vyřešit. Budeme používat ale úplně odlišný přístup. Aplikujeme Laplaceovu transformaci na popis dynamického systému a na všechny signály. Tím "přemístíme" dynamický systém spolu se vstupy a výstupy do "světa Laplace". Ve světě Laplace platí trochu odlišná pravidla než v reálném světě, na který jsme zvykli. V reálném světě uvažujeme signály, které jsou funkcemi času. Ve světě Laplace čas nehraje hlavní roli. Veškeré funkce jsou tady funkcemi nějaké komplexní proměnné s. Její význam není příliš interpretovatelný, smiřme se s tím, že je to základ světa Laplace, na kterém je postaveno to jeho kouzlo. Snad po větším ponoření do teorie automatického řízení ucítíte, v čem to kouzlo spočívá.

K tomu, abychom se přemístili do kouzelného světa Laplace, musíme použít "portál" , kterým je Laplaceova transformace. Každá funkce, která tímto portálem projde, se přemění. Její "vizáži" ve světě Laplace se říká Laplaceův obraz, nebo jenom obraz. Abychom se vždy mohli zorientovat, ve kterém světě právě jsme, je zvykem označovat funkce z reálného světa malými písmeny, např. $x(t)$, a jejích obrazy ve světě Laplace velkými písmeny, např. $X(s)$. K lepší orientaci nám také poslouží znalost toho, že funkce v reálném světě závisí na čase t a jejich Laplaceovy obrazy závisí na komplexní proměnné s.

Vráťme se k našemu dynamickému systému. Vstupní signál $u(t)$ se po použití Laplaceovy transformace přemění na obraz vstupního signálu $U(s)$. S diferenciální rovnicí je to už trochu komplikovanější. Když projde Laplaceovou transformaci, tak bude z toho zase rovnice, která se ale skládá z množství "vizáží" jednotlivých funkcí (vstupů, výstupů a jejích derivací). Není to z uživatelského hlediska moc praktické, vhodnější by bylo místo toho mít nějakou funkci. Proto diferenciální rovnice ve světě Laplace získá nový alias, kterému se říká obrazový přenos. Zatím to vypadá moc vágně, však když ho spočítáme, budete mít jasno, co bylo předchozí větou míněno.

Další kroky v analýze odezvy dynamického systému na určitý budicí signál probíhají ve světě Laplace. Po provedení všech požadovaných operací zjistíme obraz výstupního signálu. Tato funkce je ale pro nás nevhodná k analýze vzhledem k tomu, že jsme zvyklí analyzovat a zobrazovat funkce závislé na čase, a ne na nějaké komplexní proměnné s. Proto je potřeba se vrátit ze světa Laplace do světa reálného. K tomu se používá zpětný "portál", kterému se říká zpětná Laplaceova transformace. Po aplikaci zpětné Laplaceovy transformace na Laplaceův obraz výstupního signálu zjistíme originál výstupu, který v podstatě byl cílem naších cestovaní mezi různými světy.

Matematicky se přímá Laplaceova transformace definuje jako:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt. \tag{1}$$

Zpětná Laplaceova transformace je definována jako:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s) \cdot e^{st} ds. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) nemusíte mít žádný strach. V rámci předmětu teorie automatického řízení se nepoužívají přímo podle definice. Místo toho používáme takzvaný slovník Laplaceových transformací. Je to tabulka, ve které jsou uvedené nejčastěji používané funkce a jejích obrazy. Když ji zkusíte dohlédat, tak v závislosti na vašem štěstí, narazíte na tabulku obsahující od 10 do 30 řádků (možná i víc). Myslím si, že je úplně zbytečné se pokoušet o jakousi "výstižnou" tabulku. Místo toho budu postupně uvádět ty řádky, které v rámcích výuky budete potřebovat. Ale tyto řádky už byste měli pamatovat a měli byste umět je použit.

Přímá a zpětná Laplaceova transformace, obdobně jako ostatní matematické operace, mají své určité vlastnosti. Zase si myslím, že uvádět celý jejích seznam je úplně zbytečné. Proto budu uvádět jenom ty, které skutečně v rámcích předmětu použijete.

Matematický postup výpočtu výstupního signálu za použití Laplaceovy transformace a obrazového přenosu je uvedený v následující kapitole. Kromě toho, jsou popsány dva případy zvláštních odezev, které se používají v teorii automatického řízení nejvíce. Ale předtím, než se do toho vrhneme, měli bychom se lépe zorientovat v obrazových přenosech: co je to obrazový přenos, jak se spočítá, jaké informace z něj dokážeme vytáhnout a v jakých tvarech ho můžeme zapsat. Vzhledem k tomu, že většinu času při studiu teorie automatického řízení strávíte ve světě Laplace, je k pochopení tohoto předmětu nezbytné se vyznat v základních pojmech a pravidlech Laplaceova světa. Z tohoto důvodu je zbytek kapitoly věnován výpočtu a analýze obrazového přenosu.

Jak již bylo zmíněno výše, obrazový přenos je jakýsi "alias" pro diferenciální rovnici ve světě Laplace. Tím že je to "alias" míním, že není přímo

Laplaceovou transformací diferenciální rovnice, ale je s ní velmi těsně propojen. K odvození obrazového přenosu aplikujeme Laplaceovu transformaci na diferenciální rovnici popisující chování dynamického systému. V obecném tvaru tato rovnice může být zapsána jako:

$$\begin{aligned} a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y^{I}(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ = b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \cdot u^{I}(t) + b_0 \cdot u(t). \end{aligned} \quad (3)$$

V rámcích tohoto dokumentu se řády derivací označují pomocí závorek (např. $x^{(n)}$) na rozdíl od mocnin, které se označují bez závorek (např. x^n).

Poznámka: rovnice (3) se používá k popisu toho nejjednoduššího druhu dynamických systémů – lineárního (tímto míníme, že má lineární statickou charakteristiku), časově invariantního (koeficienty u diferenciální rovnice, kterým se oficiálně říká parametry, se nemění v čase), s jedním vstupem a jedním výstupem. Nehledě na počet přívlastků, je tento druh systémů široce používaný v praxi. Diferenciální rovnice (3) je také základem při odvození dalších, sofistikovanějších popisu pro ty náročnější dynamické systémy (se kterými byste se mohli potkat v budoucnu).

K tomu, abychom mohli aplikovat Laplaceovu transformaci na diferenciální rovnici (3), musíme vědět jednu vlastnost Laplaceovy transformace. Je to lineární vlastnost, kterou budeme používat pořad (vědomě nebo podvědomě) při práci s přímou nebo zpětnou Laplaceovou transformací. Může být vyjádřená následovně:

$$L\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = L\{a \cdot f(t)\} + L\{b \cdot g(t)\} = a \cdot L\{f(t)\} + b \cdot L\{g(t)\}. \quad (4)$$

Tato šikovná vlastnost doprovází většinu základních matematických operací. Vzhledem k tomu, že Laplaceova transformace je v podstatě zvláštním integrálem funkce, není divu, že má tu stejnou vlastnost jako integrál. Aplikujeme Laplaceovu transformaci na diferenciální rovnici popisující chování dynamického systému. Vzhledem k tomu, že Laplaceovy transformace jsou si rovny, když jsou si rovny originály odpovídajících funkcí, aplikujeme ji zvlášť na levou a pravou část diferenciální rovnice (3):

$$L\{a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y^I(t) + a_0 \cdot y(t)\} = \\ = L\{b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \cdot u^I(t) + b_0 \cdot u(t)\}. \tag{5}$$

V levé a v pravé části máme Laplaceovu transformaci součtu, která podle lineární vlastnosti je rovna součtu Laplaceových transformací:

$$L\{a_n \cdot y^{(n)}(t)\} + L\{a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t)\} + \cdots + L\{a_1 \cdot y^I(t)\} + L\{a_0 \cdot y(t)\} = \\ = L\{b_m \cdot u^{(m)}(t)\} + L\{b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t)\} + \cdots + L\{b_1 \cdot u^I(t)\} + L\{b_0 \cdot u(t)\}. \tag{6}$$

Lineární vlastnost můžeme také použít pro vynášení příslušných koeficientů před operátor Laplaceovy transformace:

$$a_n \cdot L\{y^{(n)}(t)\} + a_{n-1} \cdot L\{y^{(n-1)}(t)\} + \cdots + a_1 \cdot L\{y^I(t)\} + a_0 \cdot L\{y(t)\} = \\ = b_m \cdot L\{u^{(m)}(t)\} + b_{m-1} \cdot L\{u^{(m-1)}(t)\} + \cdots + b_1 \cdot L\{u^I(t)\} + b_0 \cdot L\{u(t)\}. \tag{7}$$

Abychom mohli pokračovat v našem odvození dál, musíme vědět jedno pravidlo ze slovníku Laplaceových transformací. Je to samozřejmě Laplaceova transformace derivace:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \cdots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{8}$$

Všimněte si, že derivace řadu n se ve světě Laplace převadí na n-tou mocninu komplexní proměnné s. To je to pravé kouzlo Laplaceovy transformace převáděcí diferenciální rovnici na rovnici algebraickou. Další sčítance jsou v podstatě hodnoty počátečních podmínek (při derivování musíme také definovat počáteční podmínky funkcí a jejích derivací) vynásobené příslušnými koeficienty. Abychom se zbavili těchto sčítanců, položíme počáteční podmínky rovny nule.

Poznámka: je pro nás jednodušší zajistit, aby všechny počáteční podmínky u analyzovaného systému byly nulové než s nimi při výpočtu počítat. Například, při řízení polohy nějakého stroje, bychom měli nastavit polohu a její derivace (rychlost, zrychlení) na nulu před provedením jakýchkoliv měření. To by znamenalo najet na referenční bod a stroj zcela zastavit. Je to mnohonásobně jednodušší, než měřit hodnoty "počátečních podmínek", a pak se s nimi počítat.

Pokud jsou všechny počáteční podmínky rovny nule, Laplaceův obraz derivace je roven odpovídající mocnině s násobené Laplaceovým obrazem derivované funkce:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s). \tag{9}$$

Z (9) je vidět, že komplexní proměnnou s můžeme chápat jako operátor derivování.

Teď můžeme použit pravidlo (9) pro Laplaceovu transformaci rovnice (7) (avšak nesmíme zapomenout, že počáteční podmínky jsme položili rovny nule):

$$\begin{aligned} &a_n \cdot s^n \cdot Y(s) + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot Y(s) + \cdots + a_1 \cdot s \cdot Y(s) + a_0 \cdot Y(s) = \\ &= b_m \cdot s^m \cdot U(s) + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \cdot U(s) + \cdots + b_1 \cdot s \cdot U(s) + b_0 \cdot U(s). \end{aligned} \tag{10}$$

Vyneseme $Y(s)$ a $U(s)$ před závorky a po této jednoduché algebraické úpravě máme:

$$\begin{aligned} &Y(s) \cdot (a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0) \\ &= U(s) \cdot (b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Takto vypadá Laplaceův obraz diferenciální rovnice. Už ale bylo několikrát zmíněno, že je vhodné místo této rovnice použít nějakou funkci. Touto funkci je obrazový přenos. Konečně se dostáváme k jeho definici.

Obrazový přenos je podíl Laplaceova obrazu výstupu ku Laplaceovu obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách. Obrazový přenos je funkce komplexní proměnné s a se běžně označuje pomocí písmenka G, občas se používá také písmenko F. V tomto dokumentu používám tu druhou variantu, protože věřím tomu, že pochopení přechodové a impulzní funkce je s písmenkem F jednodušší. V další kapitole se dozvíte, proč jsou tato dvě označení rovnocenná. Obrazový přenos dynamického systému:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \tag{12}$$

Z (11) a (12) plyne:

$$F(s) = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}. \tag{13}$$

Když se podíváme pozorně na původní diferenciální rovnici a na výsledný obrazový přenos, nemůže nás minout jejích podobnost. Přesvědčte se:

Diferenciální rovnice	**Obrazový přenos**
$\boldsymbol{a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y^{I}(t) + a_0 \cdot y(t) =}$ $\boldsymbol{= b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \cdot u^{I}(t) + b_0 \cdot u(t)}$	$\boldsymbol{F(s) = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}}$

Z toho vyplývá velmi dobrá zpráva: vůbec nemusíme provádět Laplaceovu transformaci pokaždé, když potřebujeme získat obrazový přenos odpovídající nějaké diferenciální rovnici. Můžeme ho zapsat rovnou. Čitateli patří všechno co je spojené se vstupním signálem $u(t)$ (zpravidla to je v pravé části diferenciální rovnice), jmenovateli patří všechno co je spojené s výstupním signálem $y(t)$ (zpravidla to je v levé části diferenciální rovnice). Veškeré koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ a $b_0, b_1, \dots, b_m$ zůstávají beze změn, veškeré derivace se nahradí za mocniny s. Podívejte se na příklady a pokud je vám v těchto příkladech všechno jasné, nemusíte mít obavy z úlohy sestavení obrazového přenosu z diferenciální rovnice a obráceně.

Příklad 1. Zapište obrazový přenos odpovídající této diferenciální rovnici

$$3 \cdot y'(t) + 5 \cdot y(t) = u(t).$$

$$F(s) = \frac{1}{3 \cdot s + 5}.$$

Příklad 2. Zapište obrazový přenos odpovídající této diferenciální rovnici

$$4 \cdot y''(t) + 2 \cdot y'(t) + 3 \cdot y(t) = 5 \cdot u(t).$$

$$F(s) = \frac{5}{4 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 3}.$$

Příklad 3. Zapište obrazový přenos odpovídající této diferenciální rovnici

$$y''(t) + 3 \cdot y(t) = 4 \cdot u(t).$$

$$F(s) = \frac{4}{s^2 + 3}.$$

Příklad 4. Zapište obrazový přenos odpovídající této diferenciální rovnici

$$y'''^{(t)} + 2 \cdot y''(t) + 3 \cdot y'(t) + 4 \cdot y(t) = 5 \cdot u''(t) + 6 \cdot u'(t) + 7 \cdot u(t).$$

$$F(s) = \frac{5 \cdot s^2 + 6 \cdot s + 7}{s^3 + 2 \cdot s^2 + 3 \cdot s + 4}.$$

Příklad 5. Zapište obrazový přenos odpovídající této diferenciální rovnici

$$7 \cdot y''(t) + 2 \cdot y'(t) = 3 \cdot u'(t) + 4 \cdot u(t).$$

$$F(s) = \frac{3 \cdot s + 4}{7 \cdot s^2 + 2 \cdot s}.$$

Příklad 6. Zapište obrazový přenos odpovídající této diferenciální rovnici

$$y'''(t) + 5 \cdot y''(t) + 2 \cdot y'(t) = 7 \cdot u''(t) + 3 \cdot u(t).$$

$$F(s) = \frac{7 \cdot s^2 + 3}{s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s}.$$

Způsoby zápisu obrazového přenosu

Obrazový přenos se může vyskytovat v jednom z následujících tvaru:

- zápis pomocí polynomů,
- zápis s kořeny,
- zápis s časovými konstantami.

V nejhorším případě narazíte na obrazový přenos v nějakém „kombinovaném“ tvaru, když různé části jsou zapsány ve dvou nebo třech různých tvarech. K tomu, abychom byli schopni za jakýchkoliv podmínek s obrazovým přenosem zacházet, se na to musíme podrobně podívat.

Pro začátečníka není jednoduché poznat na první pohled, ve kterém z uvedených tvarů je zkoumaný obrazový přenos zapsán. To může způsobovat chyby v různých typech výpočtů. Během studia tohoto předmětu se budete setkávat se všemi možnými způsoby zápisu. Proto důležité je umět rozlišovat a také s nimi zacházet. Ve skutečnosti nejde o žádnou velkou vědu, jen jednoduché algebraické úvahy a úpravy.

Uvědomte si, že je stále uvažován stejný obrazový přenos, který jsme získali postupem (3) - (10), jenom algebraicky poupravený. Stejný přenos, jenom “jinými slovy”. Libovolný obrazový přenos můžete převést do libovolného tvaru.

1) Zápis pomocí polynomů

Je to zápis, který jste již jednou viděli. Opakování je matka moudrosti, proto (a také k tomu abyste veškeré způsoby zápisu měli na jednom místě) si ho zopakujeme:

$$F(s)=\frac{b_m\cdot s^m+b_{m-1}\cdot s^{m-1}+\cdots+b_1\cdot s+b_0}{a_n\cdot s^n+a_{n-1}\cdot s^{n-1}+\cdots+a_1\cdot s+a_0}. \tag{14}$$

Obrazový přenos v tomto tvaru má polynom v čitateli a polynom ve jmenovateli. Polynomu ve jmenovateli se říká **charakteristický polynom**, polynom ve jmenovateli nemá zvláštní název. Když přirovnáme charakteristický polynom nule, vznikne z toho **charakteristická rovnice**.

$$a_n\cdot s^n+a_{n-1}\cdot s^{n-1}+\cdots+a_1\cdot s+a_0=0. \tag{15}$$

Důležitým parametrem je **řád systému** n, který odpovídá řádu původní diferenciální rovnice (je to největší mocnina s ve jmenovateli obrazového přenosu a také největší derivace výstupního signálu v původní diferenciální rovnici). Parametr m nemá zvláštní název, je to největší mocnina s v čitateli obrazového přenosu a také největší derivace vstupního signálu v původní diferenciální rovnici. Pro tyto parametry musí být splněna následující nerovnost:

$$n\geq m. \tag{16}$$

Nerovnosti (16) se říká **podmínka fyzikální realizovatelnosti**. Říká nám, že nemůžeme fyzicky realizovat systém u nějž největší derivace vstupu by byla větší než největší derivace výstupu.

Dalším důležitým parametrem dynamického systému je **statické zesílení**. Je to parametr, který se naučíme počítat pro libovolný způsob zápisu obrazového přenosu. Zesílení se počítá podle vzorce:

$$K = \frac{b_0}{a_0}. \tag{17}$$

Pokud je obrazový přenos zapsán ve tvaru polynomu, výpočet zesílení je triviální. U ostatních způsobu zápisu je trochu zákeřný, ale v případě jakýchkoliv potíží, můžete převést obrazový přenos do polynomiálního tvaru a použít tento triviální způsob výpočtu.

2) Zápis s kořeny

Tento způsob zápisu vznikne tím, že přirovnáme čitatel a jmenovatel k nule a z toho nám vzniknou dvě rovnice, které vyřešíme. Poté zapíšeme čitatel a jmenovatel obrazového přenosu ve tvaru součinu kořenových činitelů:

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - n_1) \cdot (s - n_2) \cdot \ldots \cdot (s - n_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \ldots \cdot (s - p_n)}. \tag{18}$$

Všimněte si, že koeficienty při největší mocnině s musejí jít před závorky (nesmíme na ně zapomenout, vyplývají z pravidel rozkladu rovnice na součin kořenových činitelů). Kořeny čitatele mají název **nuly**, proto jsou označeny $n_1, n_{2,} \ldots, n_m$ (ve skutečnosti nemají zvláštní označení). Analogicky, kořeny čitatele mají název **póly**, proto jsem je označila $p_1, p_{2,} \ldots, p_m$ (ve skutečnosti nemají zvláštní označení). Zesílení se u tohoto druhu zápisu počítá podle následujícího vzorce:

$$K = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(-n_1) \cdot (-n_2) \cdot \ldots \cdot (-n_m)}{(-p_1) \cdot (-p_2) \cdot \ldots \cdot (-p_n)}. \tag{19}$$

Takhle v obecném tvaru ten výpočet vypadá hrozně, v praxi je strašně jednoduchý, to poznáte na příkladu.

3) *Zápis s časovými konstantami*

Tento zápis je velmi informativní a hodně používaný v teorii automatického řízení:

$$G(s) = \frac{b_0 \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot (\tau_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (\tau_m s + 1)}{a_0 \cdot (T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (T_n s + 1)}. \tag{20}$$

Hodnoty $\tau_1, \tau_{2,} \ldots, \tau_m$ a $T_1, T_{2,} \ldots, T_m$ mají název **časové konstanty**. Jsou to převrácené záporně vztažené hodnoty kořenů:

$$\tau_i = -\frac{1}{n_i}; \quad T_i = -\frac{1}{p_i}. \tag{21}$$

Většinou se v literatuře všechny časové konstanty označují stejně (buď τ nebo T). Preferuji takové různé označení jenom z toho důvodu, abyste hned podle písmenka poznali, zda je časová konstanta odvozena z nuly (kořen čitatele) nebo pólu (kořen jmenovatele).

Všimněte si, že zesílení u tohoto způsobu zápisu obrazového přenosu je v podstatě dáno podílem koeficientů před závorkami, vypočítavá se stejně jako u polynomiálního tvaru:

$$K = \frac{b_0}{a_0}. \tag{22}$$

Zápis pomocí kořenů a pomocí časových konstant je velice podobný (vzhledem k tomu, že ve většině případů budou veškeré kořeny záporné, oba zápisy budou mít plusy v závorkách), ale jenom na první pohled. Je důležité tyto dva způsoby zápisu rozeznat. Většinou s tím spojené chyby vznikají při výpočtu zesílení. Pokud si nejste jistí, roznásobte závorky a tím přejdete do polynomiálního tvaru.

Nejhorším případem je, pokud je obrazový přenos zapsán v nějakém kombinovaném tvaru, obzvlášť pokud jedna závorka obsahuje kořen, pak jiná časovou konstantu. V těchto matoucích případech je nejlepším řešením předejít chybám a převést přenos do některého z uvedených způsobů zápisu.

Poznámka: závorku obsahující kořen odlišíte od závorky obsahující časovou konstantu velmi jednoduše. Závorky s kořenem budou mít s plus něco (tím "něčím" je samozřejmě kořen s opačným znaménkem), například

$(s + 5)$ má kořen -5, odpovídající časová konstanta je 0.2. Závorky s časovou konstantou budou mít s krát něco (tím "něčím" je časová konstanta) plus jedna, například $(5 \cdot s + 1)$ má časovou konstantu 5, odpovídající kořen je -0.2. Jediná výzva pak je $(s + 1)$, ale tento případ patří do obou skupin – má kořen -1 a časovou konstantu 1.

Ukažme si převod mezi jednotlivými způsoby zápisu na příkladu.

Příklad 7. Převeďte obrazový přenos uvedený v polynomiálním tvaru do zápisu pomocí kořenů a zápisu pomocí časových konstant. V každém případě spočítejte zesílení systému.

Obrazový přenos v polynomiálním tvaru

$$F(s) = \frac{2s^2 + 6s + 4}{s^2 + 9s + 20}.$$

Zesílení systému:

$$K = \frac{4}{20} = 0.2.$$

Obrazový přenos ve tvaru kořenů

Přirovnáme čitatel obrazového přenosu k nule. Řešením této kvadratické rovnice zjistíme nuly:

$$2s^2 + 6s + 4 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4.$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2}.$$

$$s_1 = -1; \quad s_2 = -2; \quad \text{nuly systému.}$$

$$2s^2 + 6s + 4 = 2(s+1)(s+2).$$

Přirovnáme jmenovatel obrazového přenosu k nule a řešením této rovnice zjistíme póly:

$$s^2 + 9s + 20 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1.$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}.$$

$$s_1 = -4; \quad s_2 = -5; \quad \text{póly systému.}$$

$$s^2 + 9s + 20 = (s+4)(s+5).$$

Výsledný přenos:

$$F(s) = \frac{2(s+1)(s+2)}{(s+4)(s+5)}.$$

Zesílení systému:

$$K = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{4 \cdot 5} = 0.2.$$

Zkontrolujeme si, zda jsme správně odvodili, obrazový přenos ve tvaru kořenů (roznásobíme závorky):

$$F(s) = \frac{2(s+1)(s+2)}{(s+4)(s+5)} = \frac{2(s^2+3s+2)}{s^2+9s+20} = \frac{2s^2+6s+4}{s^2+9s+20}.$$

Obrazový přenos ve tvaru časových konstant

K sestavení obrazového přenosu musíme zjistit hodnoty časových konstant z kořenů:

$$\tau_1 = -\frac{1}{(-1)} = 1; \quad \tau_2 = -\frac{1}{(-2)} = 0.5;$$
$$T_1 = -\frac{1}{(-4)} = 0.25; \quad T_2 = -\frac{1}{(-5)} = 0.2.$$

Nezapomeňme také, že koeficient v čitateli odpovídá hodnotě b_0, a koeficient ve jmenovateli odpovídá hodnotě a_0 (na rozdíl od obrazového přenosu ve tvaru kořenů). Teď už můžeme zapsat výsledný přenos:

$$F(s) = \frac{4(s+1)(0.5s+1)}{20(0.25 \cdot s + 1)(0.2 \cdot s + 1)}.$$

Zesílení se v tomto případě vypočítá jednoduše:

$$K = \frac{4}{20}.$$

A zase si zkontrolujeme správnost obdrženého obrazového přenosu (roznásobením závorek):

$$F(s) = \frac{4(s+1)(0.5s+1)}{20(0.25 \cdot s + 1)(0.2 \cdot s + 1)} = \frac{4(0.5s^2 + 1.5s + 1)}{20(0.05s^2 + 0.45s + 1)} = \frac{2s^2 + 6s + 4}{s^2 + 9s + 20}.$$

2. PŘECHODOVÁ A IMPULZNÍ CHARAKTERISTIKA

2.1 Teoretický úvod

V předchozí kapitole jsme se podívali na obrazový přenos dynamického systému. Tvar obrazového přenosu odpovídá našim představám o interní dynamice systému. Avšak u reálných systémů obrazový přenos nemůžeme nějakým způsobem "změřit" (stejně tak nemůžeme "změřit" diferenciální rovnici popisující dynamický systém). Ke zjištění obrazového přenosu můžeme použít jeden ze dvou způsobů: buď si ho odvodíme na základě teoretických znalostí o dynamickém systému anebo si změříme odezvu systému na nějaký budicí signál, ze které pak odvodíme obrazový přenos.

V této kapitole si ukážeme postup zjištění odezvy systémů na libovolný signál pomocí Laplaceovy transformace. Dále se podíváme na dvě charakteristiky dynamických systémů: přechodovou a impulzní. Jsou to odezvy systémů na určitý druh vstupního buzení, které se používají docela často v praxi. Důvodem k jejich použití je poměrná jednoduchost, jak ze strany měření na reálném systému, tak ze strany jejich výpočtu. Navíc jsou k tomu velmi informativní. Tímto myslím, že se z těchto grafů dozvíme o systému spoustu informací: dynamiku systému, náchylnost ke kmitaní, v mnoha případech statické zesílení (u přechodové charakteristiky), a v některých případech i rovnou obrazový přenos (u dynamických systémů prvního řádu).

Ale předtím, než se dostaneme k výpočtu přechodové a impulzní funkce, podíváme se nejdřív na obecný postup výpočtu odezvy dynamického systému na libovolný druh vstupního signálu. U tohoto postupu se budeme pohybovat mezi reálným světem a „světem Laplace". Než budete ve čtení pokračovat, vřele doporučuji přečíst si předchozí kapitolu týkající se obrazového přenosu, pokud jste tak již neučinili.

V reálném světě se dynamické systémy popisují pomocí diferenciálních rovnic. Na vstupu systému je nějaký budící signál $u(t)$, na výstupu je odezva systému $y(t)$. Ve světě Laplace se diferenciální rovnice nahrazuje obrazovým přenosem. Místo vstupního signálu máme Laplaceův obraz vstupního signálu

$U(s)$, výstupní signál se analogicky nahrazuje Laplaceovým obrazem výstupního signálu $Y(s)$. Pokud je naším cílem výpočet odezvy systému na nějaký budící signál, obrazový přenos je známý (případně je známa diferenciální rovnice, ze které tento přenos jednoduše odvodíme) a je známý průběh vstupního signálu $u(t)$. Úkolem je v podstatě zjistit z těchto informací výstup dynamického systému $y(t)$. Jak na to? Vzpomeňme si, že obrazový přenos je podíl Laplaceova obrazu výstupního signálu k Laplaceovu obrazu vstupního signálu (při nulových počátečních podmínkách):

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \tag{23}$$

Z rovnice (23) můžeme odvodit Laplaceův obraz výstupního signálu:

$$Y(s) = F(s) \cdot U(s). \tag{24}$$

V pravé části rovnice (24) máme obrazový přenos (známá funkce) a Laplaceův obraz vstupní funkce (zatím neznámý). Vzhledem k tomu, že známe originál vstupní funkce neboli průběh vstupního signálu v čase, můžeme vypočítat jeho Laplaceův obraz pomocí přímé Laplaceovy transformace:

$$U(s) = L\{u(t)\}. \tag{25}$$

Když dosadíme (25) do rovnice (24), můžeme vypočítat Laplaceův obraz výstupního signálu:

$$Y(s) = F(s) \cdot L\{u(t)\}. \tag{26}$$

Zajímá nás ale průběh výstupního signálu v čase neboli originál výstupního signálu (funkce času umíme zobrazit a analyzovat). Ten získáme pomocí zpětné Laplaceovy transformace:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}. \tag{27}$$

Když dosadíme (27) do (26) máme celý postup výpočtu v jednom vzorci:

$$y(t) = L^{-1}\big\{F(s) \cdot L\{u(t)\}\big\}. \tag{28}$$

Jinak řečeno, při výpočtu odezvy se pohybujeme mezi reálným světem a světem Laplace a je důležité vždy vědět, kde teď zrovna jsme. Při analýze chování dynamických systémů nás zajímají funkce v reálném světě, které umíme popsat a umíme změřit. V reálném světě máme vstupní signál $u(t)$ a diferenciální rovnici popisující dynamický systém. A naším úkolem je v podstatě tuto diferenciální rovnici vyřešit. Řešením této rovnice je samozřejmě výstupní funkce $y(t)$. Ale diferenciální rovnici nechceme řešit klasickým způsobem, tak se přemístíme do světa Laplace pomocí “vstupního portálu“ – přímé Laplaceovy transformace. Diferenciální rovnici převedeme na obrazový přenos, vstupní signál převedeme na Laplaceův obraz vstupního signálu. Ve světě Laplace vypočteme Laplaceův obraz výstupního signálu $Y(s)$ pomocí rovnice (26). Teď je na čase se vrátit do reálného světa pomocí “výstupního portálu” – zpětné Laplaceovy transformace, kterou aplikujeme na Laplaceův obraz výstupního signálu, viz (28). Tímto máme náš původní cíl splněn.

Uvedený postup je zcela obecný, může se použít pro kteroukoliv budící funkci. K těm nejrozšířenějším vstupním signálům, které se používají v praxi patří jednotkový skok a jednotkový (Diracův) impulz. Odezvy na tyto budící funkce jsou právě hlavními postavy této kapitoly. Přidáme jejích definice.

Přechodová charakteristika je odezvou dynamického systému na jednotkový skok při nulových počátečních podmínkách.

Impulzní charakteristika je odezvou dynamického systému na jednotkový (Diracův) impulz při nulových počátečních podmínkách.

Teď se pokusíme tyto definice rozluštit. Splnění podmínky rovnosti nule veškerých počátečních podmínek je spojeno s použitím obrazového přenosu k popisu dynamických systémů ve světě Laplace. V předchozí kapitole již bylo ukázáno, proč je splnění této podmínky důležité a že bez splnění této podmínky není možné definovat obrazový přenos. Tato podmínka je také zahrnuta v definici přechodové a impulzní charakteristiky. Sice bychom mohli přivést na vstup dynamického systému popsaného diferenciální rovnicí s nenulovými počátečními podmínkami jednotkový skok, ale odezvu dynamického systému bychom pak nemohli definovat jako přechodovou charakteristikou (stejné úvahy platí pro impulzní charakteristiku).

Teď se podíváme na jednotkový skok a jednotkový impulz. Jednotkový skok je označován jako $\eta(t)$. V teorii je tento signál představen jako skoková (okamžitá) změna vstupního signálu z hodnoty nula na hodnotu jedna. V praxi se pak používá signál, který se maximálně přibližuje tomuto průběhu (tímto míníme, že není možné realizovat ideální skok, ale je možné se tomuto ideálnímu skoku maximálně přiblížit). Pokud podmínky měření nebo vlastnosti systému nedovoluji přivést na vstup jednotkový skok, můžeme přivést na vstup skok libovolně veliký. Body výsledné odezvy pak musíme vydělit zvolenou výškou skoku, abychom získali ve výsledku přechodovou charakteristiku zkoumaného dynamického systému.

Jednotkový (Diracův) impulz je označován jako $\delta(t)$. V teorii je tento signál představen jako impulz nekonečně veliký, který se vrátí k nule během nekonečně krátkého časového úseku. Samozřejmě tento signál nemůže být realizován v praxi jednak kvůli tomu, že není možné realizovat "nekonečně krátký časový úsek", jednak kvůli tomu, že většina zařízení se porouchá pod vlivem signálu velké výšky (nemluvě o signálech "nekonečné výšky", které mimochodem také nejsou realizovatelné). V praxi se tento signál nahrazuje skokem maximální realizovatelné výšky, jehož plocha je rovna jedničce (proto tento signál má název jednotkový impulz), od toho se pak odvíjí délka trvání signálu.

Přechodové a impulzní charakteristiky jsou **grafy** reprezentující odezvy systému na určité signály. K nakreslení grafu obecně potřebujeme vědět **funkci** popisující příslušný průběh. Graf pak reprezentuje průběh funkce v čase. Z toho vyplývají následující definice.

Přechodová funkce je funkce popisující odezvu dynamického systému na jednotkový skok při nulových počátečních podmínkách. Přechodová charakteristika je grafickým znázorněním přechodové funkce v čase.

Impulzní funkce je funkce popisující odezvu dynamického systému na jednotkový impulz při nulových počátečních podmínkách. Impulzní charakteristika je grafickým znázorněním impulzní funkce v čase.

Vzhledem k tomu, že přechodová a impulzní funkce jsou speciálními případy odezvy dynamického systému na budící signál, můžeme pro jejich výpočet použit postup uvedený v (23) – (28).

2.2 Výpočet přechodové funkce

Je zvykem si označovat výstupní signál z dynamických systému jako $y(t)$, Laplaceův obraz tohoto signálu se proto označuje jako $Y(s)$. Přechodová funkce se označuje jako $h(t)$, abychom byli schopni ji hned odlišit od jiných charakteristik. Její Laplaceův obraz se pak označuje jako $H(s)$. Vstupním signálem v případě přechodové charakteristiky je jednotkový skok, proto Laplaceův obraz přechodové funkce definujeme následovně:

$$H(s) = Y(s) = F(s) \cdot U(s) = F(s) \cdot L\{u(t)\} = F(s) \cdot L\{\eta(t)\}. \tag{29}$$

Laplaceův obraz jednotkového skoku je definován jako:

$$L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}. \tag{30}$$

Po dosazení (30) do (29) máme:

$$H(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s}. \tag{31}$$

Jednotkový skok má v Laplaceově světě poměrně jednoduchý obraz, což je ještě jedním důvodem k širokému použití přechodové charakteristiky při analýze dynamických systému.

Výsledek v (31) je Laplaceovým obrazem přechodové funkce, my ale potřebujeme k analýze originál (funkci času, ne komplexní proměnné s). Najít ho můžeme samozřejmě pomocí zpětné Laplaceovy transformace:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{F(s) \cdot \frac{1}{s}\right\}. \tag{32}$$

2.3 Výpočet impulzní funkce

Impulzní funkce má také své označení, abychom byli schopni ji odlišit od jiných charakteristik. Označuje se $g(t)$, její Laplaceův obraz se pak označuje jako $G(s)$. Vstupním signálem v případě impulzní charakteristiky je jednotkový impulz, proto Laplaceův obraz impulzní funkce definujeme následovně:

$$H(s) = Y(s) = F(s) \cdot U(s) = F(s) \cdot L\{u(t)\} = F(s) \cdot L\{\delta(t)\}. \tag{33}$$

Laplaceův obraz jednotkového impulzu je definován jako:

$$L\{\delta(t)\} = 1. \tag{34}$$

Po dosazení (34) do (33) máme:

$$G(s) = F(s). \tag{35}$$

Vzhledem k tomu, že Laplaceův obraz jednotkového impulzu je roven jedničce, je impulzní charakteristika velmi rozšířena i přes to, že jednotkový impulz je z praktického hlediska velmi zvláštním signálem.

Poznámka: z rovnosti (35) vyplývá, že obrazový přenos je Laplaceovým obrazem impulzní funkce. Proto se k označení obrazového přenosu často používá $G(s)$.

Výsledek v (35) je Laplaceovým obrazem impulzní funkce, my ale potřebujeme k analýze originál této funkce (funkci času, ne komplexní proměnné s). Najít ho můžeme samozřejmě pomocí zpětné Laplaceovy transformace:

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{F(s)\}. \tag{36}$$

2.3 Postup výpočtu přechodové a impulzní funkce

Když máme za cíl spočítat přechodovou a impulzní funkci systému, začínáme tím, že převedeme jmenovatel obrazového přenosu do tvaru kořenových činitelů:

$$F(s) = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot (s - p_1)(s - p_2) \cdot \ldots \cdot (s - p_n)}. \tag{37}$$

Je také vhodné zbavit se koeficientu u největší mocniny s ve jmenovateli. Pokud tuto operaci neprovedeme, měli bychom s tím koeficientem počítat při dalších algebraických výpočtech. Abychom předešli zbytečným komplikacím, vydělíme čitatel a jmenovatel obrazového přenosu koeficientem a_n:

$$F(s) = \frac{\frac{b_m}{a_n} \cdot s^m + \frac{b_{m-1}}{a_n} \cdot s^{m-1} + \cdots + \frac{b_1}{a_n} \cdot s + \frac{b_0}{a_n}}{(s - p_1)(s - p_2) \cdot \ldots \cdot (s - p_n)}. \tag{38}$$

Laplaceův obraz přechodové funkce podle (31) můžeme zapsat jako:

$$H(s) = \frac{\frac{b_m}{a_n} \cdot s^m + \frac{b_{m-1}}{a_n} \cdot s^{m-1} + \cdots + \frac{b_1}{a_n} \cdot s + \frac{b_0}{a_n}}{(s-p_1)(s-p_2) \cdot \ldots \cdot (s-p_n) \cdot s}. \tag{39}$$

Laplaceův obraz impulzní funkce podle (35) můžeme zapsat jako:

$$G(s) = \frac{\frac{b_m}{a_n} \cdot s^m + \frac{b_{m-1}}{a_n} \cdot s^{m-1} + \cdots + \frac{b_1}{a_n} \cdot s + \frac{b_0}{a_n}}{(s-p_1)(s-p_2) \cdot \ldots \cdot (s-p_n)}. \tag{40}$$

Dalším krokem ve výpočtu je aplikace zpětné Laplaceovy transformace na rovnici (39) k získání přechodové funkce $h(t)$ a na rovnici (40) k získání impulzní funkce $g(t)$. V obou dvou případech se jedná o poměrně komplikované funkce (polynom dělený polynomem), které nejsou ve slovníku Laplaceových transformací. V takovém tvaru bychom těžko hledali originály hledaných funkcí (měli bychom použít zpětnou Laplaceovu transformaci v její definiční podobě, takže bychom měli spočítat kruhový integrál). K tomu abychom si tuto úlohu zjednodušili, rozložíme obrazy (39) a (40) na parciální zlomky. Po provedení této (poměrně) jednoduché operace, originály funkcí zjistíme jednoduše za použití slovníku Laplaceových transformací. Tímto máme spočítanou přechodovou a impulzní funkci. Když tyto funkce graficky znázorníme, vznikne z toho přechodová a impulzní charakteristika.

Z uvedených informací je patrné, že výpočet přechodové a impulzní charakteristiky z hlediska kybernetiky je jednoduchý. Krok způsobující drobné potíže je rozklad Laplaceova obrazu výstupního signálu na parciální zlomky. K tomu se může použít jedna z následujících metod:

- metoda neurčitých koeficientů,
- výpočet dosazováním,
- metoda přímého hledání (pomocí limit).

Dále jsou uvedeny příklady výpočtu. U každého příkladu je uveden postup výpočtu pomocí všech třech metod. Vzhledem k tomu, že všechny metody vedou ke stejným výsledným koeficientům, můžete je kombinovat (například, vypočítat několik koeficientů podle jedné metody, a pak dopočítat zbytek pomocí jiné metody).

Příklad 8. Vypočtěte přechodovou a impulzní funkci systému popsaného pomocí uvedené diferenciální rovnice:

$$4 \cdot y' + 2 \cdot y = 8u.$$

Převedeme diferenciální rovnici na obrazový přenos:

$$F(s) = \frac{8}{4 \cdot s + 2}.$$

Upravíme obrazový přenos do doporučeného tvaru (vydělíme čitatel a jmenovatel koeficientem při největší mocnině ve jmenovateli):

$$F(s) = \frac{2}{s + 0.5}.$$

Přechodová funkce systému:

$$H(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{(s + 0.5) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.5}.$$

Teď musíme dopočítat koeficienty v čitatelích parciálních zlomků. Ukažme si postup výpočtu pro všechny tři metody a poté se vrátíme k výše uvedenému Laplaceovu obrazu přechodové funkce:

1) Metoda neurčitých koeficientů

Nejdříve převedeme parciální zlomky na společného jmenovatele:

$$H(s) = \frac{2}{(s + 0.5) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.5} = \frac{A \cdot (s + 0.5) + B \cdot s}{(s + 0.5) \cdot s}.$$

Zlomky jsou si rovny, když jsou si rovny čitatelé a jmenovatelé. Vzhledem k tomu, že jmenovatelé u prvního a posledního zlomků se rovnají, můžeme porovnat čitatele těchto zlomků:

$$A \cdot (s + 0.5) + B \cdot s = 2.$$

Přeskupíme sčítance podle příslušné mocniny s:

$$s^1 \cdot (A + B) + s^0 \cdot (0.5 \cdot A) = s^1 \cdot 0 + s^0 \cdot 2.$$

Tato rovnice vyjadřuje rovnost mezi dvěma (trochu zvláštními) polynomy. Polynomy jsou si rovny, když jsou si rovny jejích koeficienty. To znamená, že můžeme příslušné koeficienty porovnat a z toho nám vznikne následující soustava rovnic:

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ 0.5 \cdot A = 2. \end{cases}$$

Řešením této soustavy rovnic získáme hledané koeficienty:

$$A = 4;$$
$$B = -4.$$

2) Výpočet dosazováním

Prvních několik kroku této metody je stejných, jako u předchozí metody. Přivedeme parciální zlomky na společného jmenovatele:

$$H(s) = \frac{2}{(s + 0.5) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.5} = \frac{A \cdot (s + 0.5) + B \cdot s}{(s + 0.5) \cdot s}.$$

Přirovnáme čitatele parciálních zlomků:

$$A \cdot (s + 0.5) + B \cdot s = 2.$$

Postup výpočtu koeficientů z této rovnice se ale bude oproti předchozí metodě lišit. Je to rovnice, proto se může místo s dosadit jakékoliv číslo a rovnost bude stále splněná. Nejjednoduššího výpočtu dosáhneme, pokud položíme s rovno některému z kořenů ve jmenovatelích parciálních zlomků.

Položíme $s = 0$:

$$0.5A = 2; \quad A = 4.$$

Teď položíme $s = -0.5$:

$$(-0.5)B = 2; \quad B = -4.$$

Tímto máme spočítány koeficienty u parciálních zlomků. Na takovém jednoduchém příkladu není moc vidět výhoda této metody oproti předchozí. U složitějších systémů to ale už vidět bude.

Poznámka: pokud po vyčerpání všech kořenů nám stále zbývají neznámé koeficienty, můžeme za s dosadit libovolné číslo. Nejlogičtějšími volbami jsou nějaké jednoduše spočitatelná čísla, jako například $s = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ apod.

3) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

Přepíšeme ještě jednou, čemu je roven Laplaceův obraz přechodové funkce:

$$H(s) = \frac{2}{(s + 0.5) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.5}.$$

Jednotlivé koeficienty u této metody se počítají každý zvlášť. Pro každý koeficient zjistíme součin původního zlomku a jmenovatele parciálního zlomku, se kterým zrovna pracujeme. Poté spočítáme limitu tohoto součinu při s, které se blíží k hodnotě kořene parciálního zlomku. Počítá se to jednodušeji, než se to zdá podle popisu. Výhodou této metody je, že hned poznáte, pokud jste nedodrželi výše uvedený přístup. Pokud vynásobíte zlomek něčím jiným než odpovídajícím jmenovatelem, po dosazení vám vyjde nějaké číslo dělené nulou. Limita je pak rovna nekonečnu, což se stát nemůže, protože koeficient musí být konkrétním číslem (ve většině případů).

Koeficienty u našeho příkladu se spočítají následujícím způsobem:

$$A = \lim_{s \to 0} \big(s \cdot H(s)\big) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{2}{s + 0.5}\right) = 4.$$

$$B = \lim_{s \to -0.5} \big((s + 0.5) \cdot H(s)\big) = \lim_{s \to 0.5} \left(\frac{2}{s}\right) = -4.$$

Máme spočítané koeficienty, a tak se můžeme konečně vrátit ke “kybernetickým záležitostem”. Dosadíme spočítané koeficienty do Laplaceova obrazu přechodové funkce:

$$H(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 0.5}.$$

Teď z toho chceme pomocí zpětné Laplaceovy transformace zjistit originál přechodové funkce:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{4}{s} - \frac{4}{s + 0.5}\right\}.$$

Lineární vlastnost Laplaceovy transformace nám říká, že Laplaceova transformace součtu je rovna součtu Laplaceových transformací. Navíc nám to říká, že koeficient, kterým je vynásobená funkce jejíž originál se chystáme najít, může být přenesen před Laplaceovu transformaci:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{4}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4}{s + 0.5}\right\} = 4 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 0.5}\right\}.$$

Ke zjištění originálů těchto funkcí za použití zpětné Laplaceovy transformace budeme potřebovat následující pravidlo ze slovníku Laplaceových transformací:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s + a}\right\} = e^{-a \cdot t}.$$

Když toto pravidlo aplikujeme, dostaneme přechodovou funkci

$$h(t) = 4 - 4 \cdot e^{-0.5 \cdot t}.$$

Výpočet impulzní funkce se provádí analogickým způsobem. Laplaceův obraz impulzní funkce se rovná obrazovému přenosu:

$$G(s) = F(s) \cdot 1 = \frac{2}{s + 0.5}.$$

Pro tento jednoduchý případ vůbec nemusíme rozkládat Laplaceův obraz impulzní funkce na parciální zlomky. Můžeme tak rovnou aplikovat zpětnou Laplaceovu transformaci na tento obraz a tím zjistíme impulzní funkci:

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s + 0.5}\right\} = 2 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 0.5}\right\} = 2 \cdot e^{-0.5 \cdot t}.$$

Ve většině případů impulzní charakteristika obsahuje víc než jeden kořenový činitel ve jmenovateli. Pak se musí rozkládat na parciální zlomky úplně stejným způsobem, jako přechodová charakteristika. Jenom těchto zlomků bude vždy o jeden méně než u přechodové charakteristiky. Koeficienty v čitatelích parciálních zlomků nebudou stejné, musejí se přepočítávat za použití jedné z uvedených výše metod.

Existuje ale ještě jeden způsob zjištění impulzní funkce. Impulzní funkce je první derivací přechodové funkce:

$$g(t) = h'(t).$$

Tato pěkná vlastnost se může použít ke zjednodušení výpočtu. Vyhneme se opětovnému přepočítávání koeficientů u nových parciálních zlomků. U tak jednoduchého příkladu tato časová úspora není vůbec vidět, ale u dalších složitějších příkladů už to vidět určitě bude.

$$g(t) = h'(t) = (4 - 4 \cdot e^{-0.5 \cdot t})' = (-0.5) \cdot (-4 \cdot e^{-0.5 \cdot t}) = 2 \cdot e^{-0.5 \cdot t}.$$

Samozřejmě, jsme získali stejný výsledek. Při derivování přechodové funkce (v tomto příkladu a ve všech následujících) dochází k derivaci složené funkce. Funkce $e^{-0.5 \cdot t}$ je složena ze dvou funkci: e^x a t. Při derivování musíme to respektovat. Derivace $(e^{-0.5 \cdot t})'$ se bude rovnat derivaci vnější funkce násobené derivací vnitřní funkce:

$$(e^{-0.5 \cdot t})' = (e^{-0.5 \cdot t})' \cdot (-0.5 \cdot t)' = e^{-0.5 \cdot t} \cdot (-0.5).$$

Příklad 9. Vypočtěte přechodovou a impulzní funkci systému popsaného pomocí uvedené diferenciální rovnice:

$$y'' + 3y' + 2 \cdot y = 6u' + 2u.$$

Převedeme diferenciální rovnicí na obrazový přenos:

$$F(s) = \frac{6 \cdot s + 2}{s^2 + 3 \cdot s + 2}.$$

Převedeme polynom ve jmenovateli na součin kořenových činitelů (přirovnáme jmenovatel nule, zjistíme kořeny: $s_1 = -1, s_2 = -2$):

$$F(s) = \frac{6 \cdot s + 2}{(s + 1) \cdot (s + 2)}.$$

Přechodová funkce systému:

$$H(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{6 \cdot s + 2}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

Teď musíme vypočítat koeficienty v čitatelích parciálních zlomků. Ukažme si postup výpočtu pro všechny tři metody a poté se vrátíme k výše uvedenému Laplaceovu obrazu přechodové funkce:

1) Metoda neurčitých koeficientů

Převedeme parciální zlomky na společného jmenovatele:

$$H(s) = \frac{6 \cdot s + 2}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$
$$= \frac{A \cdot (s+1) \cdot (s+2) + B \cdot s \cdot (s+2) + C \cdot s \cdot (s+1)}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot s}.$$

Porovnáme čitatele:

$$A \cdot (s+1) \cdot (s+2) + B \cdot s \cdot (s+2) + C \cdot s \cdot (s+1) = 6 \cdot s + 2.$$

Roznásobíme závorky:

$$A \cdot (s^2 + 3 \cdot s + 2) + B \cdot (s^2 + 2 \cdot s) + C \cdot (s^2 + s) = 6 \cdot s + 2.$$

Přeskupíme sčítance podle příslušné mocniny s:

$$s^2 \cdot (A + B + C) + s^1 \cdot (3 \cdot A + 2 \cdot B + C) + s^0 \cdot (2 \cdot A) = s^2 \cdot 0 + s^1 \cdot 6 + s^0 \cdot 2.$$

Z toho vznikne následující soustava rovnic:

$$\begin{cases} A + B + C = 0; \\ 3A + 2B + C = 6; \\ 2 \cdot A = 2. \end{cases}$$

Řešením této soustavy rovnic získáme hledané koeficienty:

$$A = 1;$$
$$B = 4;$$
$$C = -5.$$

2) Výpočet dosazováním

Převedeme parciální zlomky na společného jmenovatele:

$$H(s) = \frac{6 \cdot s + 2}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$
$$= \frac{A \cdot (s+1) \cdot (s+2) + B \cdot s \cdot (s+2) + C \cdot s \cdot (s+1)}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot s}.$$

Porovnáme čitatele:

$$A \cdot (s+1) \cdot (s+2) + B \cdot s \cdot (s+2) + C \cdot s \cdot (s+1) = 6 \cdot s + 2.$$

Roznásobovat jednotlivé závorky u této metody nemusíme. Můžeme rovnou dosazovat hodnoty odpovídající kořenům ve jmenovatelích parciálních zlomků.

Položíme $s = 0$:

$$A \cdot 1 \cdot 2 = 2; \quad A = 1.$$

Teď položíme $s = -1$:

$$B \cdot (-1) \cdot 1 = 6 \cdot (-1) + 2; \quad B = 4.$$

A nakonec $s = -2$:

$$C \cdot (-2) \cdot (-2+1) = 6 \cdot (-2) + 2; \quad C = -5.$$

3) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

Laplaceův obraz přechodové funkce je roven:

$$H(s) = \frac{6 \cdot s + 2}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

Koeficienty ve jmenovatelích jsou rovny:

$$A = \lim_{s \to 0} \big(s \cdot H(s)\big) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{6 \cdot s + 2}{(s+1) \cdot (s+2)} \right) = 1.$$

$$B = \lim_{s\to -1}\left((s+1)\cdot H(s)\right) = \lim_{s\to -1}\left(\frac{6\cdot s+2}{(s+2)\cdot s}\right) = 4.$$

$$C = \lim_{s\to -2}\left((s+2)\cdot H(s)\right) = \lim_{s\to -2}\left(\frac{6\cdot s+2}{(s+1)\cdot s}\right) = -5.$$

Máme spočítané koeficienty, dosadíme je do Laplaceova obrazu přechodové funkce:

$$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s+1} + \frac{-5}{s+2}.$$

Teď z toho zjistíme pomocí zpětné Laplaceovy transformace originál přechodové funkce:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = 1 + 4\cdot e^{-t} - 5\cdot e^{-2\cdot t}.$$

Výpočet impulzní funkce

Laplaceův obraz impulzní funkce:

$$G(s) = F(s)\cdot 1 = \frac{6\cdot s+2}{(s+1)\cdot(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

Spočítáme koeficienty ve jmenovatelích pomocí všech třech metod.

1) Metoda neurčitých koeficientů

Převedeme parciální zlomky na společného jmenovatele:

$$G(s) = \frac{6\cdot s+2}{(s+1)\cdot(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A\cdot(s+2)+B\cdot(s+1)}{(s+1)\cdot(s+2)}.$$

Porovnáme čitatele:

$$A\cdot(s+2) + B\cdot(s+1) = 6\cdot s + 2.$$

Přeskupíme sčítance podle příslušné mocniny s:

$$s^1\cdot(A+B) + s^0\cdot(2\cdot A + B) = s^1\cdot 6 + s^0\cdot 2.$$

Z toho vznikne následující soustava rovnic:

$$\begin{cases} A + B = 6; \\ A + 2B = 2. \end{cases}$$

Řešením této soustavy rovnic získáme hledané koeficienty:

$$A = -4;$$
$$B = 10.$$

2) Výpočet dosazováním

Převedeme parciální zlomky na společného jmenovatele:

$$G(s) = \frac{6 \cdot s + 2}{(s+1) \cdot (s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A \cdot (s+2) + B \cdot (s+1)}{(s+1) \cdot (s+2)}.$$

Porovnáme čitatele:

$$A \cdot (s+2) + B \cdot (s+1) = 6 \cdot s + 2.$$

Teď položíme $s = -1$:

$$A \cdot 1 = 6 \cdot (-1) + 2; \quad A = -4.$$

A $s = -2$:

$$B \cdot (-1) = 6 \cdot (-2) + 2; \quad B = 10.$$

3) Metoda přímého hledání (pomocí limit)

Laplaceův obraz přechodové charakteristiky je roven:

$$H(s) = \frac{6 \cdot s + 2}{(s+1) \cdot (s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

Koeficienty ve jmenovatelích jsou rovny:

$$A = \lim_{s \to -1} \big((s+1) \cdot G(s)\big) = \lim_{s \to -1} \left(\frac{6 \cdot s + 2}{s+2}\right) = -4.$$

$$B = \lim_{s \to -2} \big((s+2) \cdot G(s)\big) = \lim_{s \to -2} \left(\frac{6 \cdot s + 2}{s+1}\right) = 10.$$

Máme spočítané koeficienty, dosadíme je do Laplaceova obrazu impulzní funkce:

$$G(s) = \frac{-4}{s+1} + \frac{10}{s+2}.$$

Nyní zjistíme pomocí zpětné Laplaceovy transformace originál impulzní funkce:

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = -4 \cdot e^{-t} + 10 \cdot e^{-2 \cdot t}.$$

Stejného výsledku bychom dosáhli jednoduchým derivováním přechodové funkce:

$$g(t) = h'(t) = (1 + 4 \cdot e^{-t} - 5 \cdot e^{-2 \cdot t})' = -4 \cdot e^{-t} + 10 \cdot e^{-2 \cdot t}.$$

Další příklad obsahuje složitější systém a jsou v něm uvedeny funkce MATLABu, které vám mohou pomoci při výpočtu a také při kontrole spočítaných přechodových a impulzních funkcí.

Příklad 10. Vypočtěte přechodovou a impulzní funkci systému popsaného pomocí uvedené diferenciální rovnice:

$$y'''(t) + 9y''(t) + 23\,y'(t) + 15\,y(t) = u''(t) + 11\,u'(t) + 28\,u(t).$$

Obrazový přenos systému:

$$F(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}.$$

Dále rozložíme polynom ve jmenovateli na součin kořenových činitelů. K tomu můžeme použít MATLAB. Pomocí funkce *roots()* zjistíme kořeny charakteristické rovnice.

$$s^3 + 9s^2 + 23s + 15 = 0.$$

(charakteristická rovnice)

```
>> a = [1 9 23 15];
>> roots(a)
    ans =
    -5.0000
    -3.0000
    -1.0000
```

Kořeny rovnice:

$$s_1 = -5; \quad s_1 = -3; \quad s_1 = -1.$$

Výsledný součin kořenových činitelů:

$$s^3 + 9s^2 + 23s + 15 = (s+1)(s+3)(s+5).$$

Obrazový přenos:

$$F(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5)}.$$

PŘECHODOVÁ FUNKCE

Laplaceův obraz přechodové funkce je:

$$H(s) = F(s) \cdot L\{\eta(t)\} = F(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5) \cdot s}.$$

K tomu, abychom zjistili originál přechodové funkce, měli bychom nejdříve rozložit Laplaceův obraz přechodové funkce na součet parciálních zlomků:

$$H(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+5}.$$

1) Metoda neurčitých koeficientů

$$H(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+5}$$
$$= \frac{A(s+1)(s+3)(s+5) + Bs(s+3)(s+5) + Cs(s+1)(s+5) + Ds(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)(s+5) \cdot s}.$$

$$A(s+1)(s+3)(s+5) + Bs(s+3)(s+5) + Cs(s+1)(s+5) + Ds(s+1)(s+3)$$
$$= s^2 + 11s + 28.$$

$$A(s^3 + 9s^2 + 23s + 15) + Bs(s^2 + 8s + 15) + Cs(s^2 + 6s + 5) + Ds(s^2 + 4s + 3)$$
$$= s^2 + 11s + 28.$$

$$A(s^3+9s^2+23s+15)+B(s^3+8s^2+15s)+C(s^3+6s^2+5s)+D(s^3+4s^2+3s) = s^2+11s+28.$$

$$s^3(A+B+C+D)+s^2(9A+8B+6C+4D)+s^1(23A+15B+5C+3D)+s^0(15A) = s^3\cdot 0+s^2\cdot 1+s^1\cdot 11+s^0\cdot 28.$$

$$\begin{cases} A+B+C+D=0; \\ 9A+8B+6C+4D=1; \\ 23A+15B+5C+3D=11; \\ 15A=28. \end{cases}$$

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit v MATLABu:

```
>> A = [1 1 1 1; 9 8 6 4; 23 15 5 3; 15 0 0 0];

>> B = [0 1 11 28]';

>> inv(A)*B

    ans =

    1.8667

    -2.2500

    0.3333

    0.0500
```

Koeficienty ve jmenovatelích parciálních zlomků:

$$A = 1.8667;$$
$$B = -2.2500;$$
$$C = 0.3333;$$
$$D = 0.05.$$

2) Výpočet dosazováním

$$H(s)=\frac{s^2+11s+28}{(s+1)(s+3)(s+5)\cdot s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+3}+\frac{D}{s+5} = \frac{A(s+1)(s+3)(s+5)+Bs(s+3)(s+5)+Cs(s+1)(s+5)+Ds(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)(s+5)\cdot s}.$$

$$A(s+1)(s+3)(s+5)+Bs(s+3)(s+5)+Cs(s+1)(s+5)+Ds(s+1)(s+3) = s^2+11s+28.$$

s = -1

$$A \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4 + B \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 4 + C(-1) \cdot 0 \cdot 4 + D \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 2 = (-1)^2 - 11 + 28.$$

$$B \cdot (-8) = 18; \quad B = -2.25.$$

s = -3

$$C(-3) \cdot (-2) \cdot 2 = (-3)^2 + 11 \cdot (-3) + 28.$$

$$12 \cdot C = 4; \quad C = 0.3333.$$

s = -5

$$D \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot (-2) = (-5)^2 + 11 \cdot (-5) + 28.$$

$$(-40) \cdot D = -2; \quad D = 0.05.$$

s = 0

$$A \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 0^2 + 11 \cdot 0 + 28.$$

$$15 \cdot A = 28; \quad A = 1.8667.$$

Koeficienty ve jmenovatelích parciálních zlomků (samozřejmě jsou stejné jako u předchozí metody):

$$A = 1.8667;$$
$$B = -2.2500;$$
$$C = 0.3333;$$
$$D = 0.05.$$

3) Metoda přímého hledání

$$H(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+5}.$$

$$A = \lim_{s \to 0}(H(s) \cdot s) = \lim_{s \to 0}\left(\frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5)}\right) = \frac{28}{15}.$$

$$B = \lim_{s \to -1}(H(s) \cdot (s+1)) = \lim_{s \to -1}\left(\frac{s^2 + 11s + 28}{(s+3)(s+5) \cdot s}\right) = \frac{18}{-8}.$$

$$C = \lim_{s \to -3}(H(s) \cdot (s+3)) = \lim_{s \to -3}\left(\frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+5) \cdot s}\right) = \frac{4}{12}.$$

$$D = \lim_{s \to -5} (H(s) \cdot (s+5)) = \lim_{s \to -5} \left(\frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3) \cdot s} \right) = \frac{-2}{-40}.$$

Koeficienty ve jmenovatelích parciálních zlomků (opět stejné):

$$A = 1.8667;$$
$$B = -2.2500;$$
$$C = 0.3333;$$
$$D = 0.05.$$

Ověření výsledků v MATLABu (pomocí funkce *residue()*):

```
>> b = [1 11 28]; %polynom v citateli

>> a = [1 9 23 15 0]; %polynom ve jmenovateli

>> [R,P,K] = residue(b,a)

     R =

          0.0500

          0.3333

          -2.2500

          1.8667

     P =

          -5.000

          -3.000

          -1.000

          0

     K =

          []
```

Poznámka: koeficienty, které jsme získali z funkce residue() (jsou hodnotami vektoru R) jsou v jiném pořadí, než jsme to měli ve výpočtech. Dávejte pozor na to, kterému kořenu (jsou hodnotami vektoru P) odpovídá který koeficient.

Konečně dosadíme zjištěné koeficienty do čitatelů příslušných zlomků:

$$H(s) = \frac{1.8667}{s} + \frac{-2.25}{s+1} + \frac{0.3333}{s+3} + \frac{0.05}{s+5}.$$

Teď už můžeme najít originál funkce H(s), neboli naši přechodovou funkci:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = 1.8667 - 2.25 \cdot e^{-t} + 0.3333 \cdot e^{-3t} + 0.05 \cdot e^{-5t}.$$

IMPULZNÍ FUNKCE

Laplaceův obraz impulzní funkce je:

$$G(s) = F(s) \cdot L\{\delta(t)\} = F(s) \cdot 1.$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5)}.$$

K tomu, abychom zjistili originál impulzní funkce, měli bychom nejdřív rozložit Laplaceův obraz impulzní funkce na součet parciálních zlomků:

$$G(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+5}.$$

1) Metoda neurčitých koeficientů

$$G(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+5}$$
$$= \frac{A(s+3)(s+5) + B(s+1)(s+5) + C(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)(s+5)}.$$

$$A(s+3)(s+5) + B(s+1)(s+5) + C(s+1)(s+3) = s^2 + 11s + 28.$$

$$A(s^2 + 8s + 15) + B(s^2 + 6s + 5) + C(s^2 + 4s + 3) = s^2 + 11s + 28.$$

$$s^2(A + B + C) + s^1(8A + 6B + 4C) + s^0(15A + 5B + 3C) = s^2 \cdot 1 + s^1 \cdot 11 + s^0 \cdot 28.$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1; \\ 8A + 6B + 4C = 11; \\ 15A + 5B + 3C = 28. \end{cases}$$

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit v MATLABu:

```
>> A = [1 1 1; 8 6 4; 15 5 3];

>> B = [1 11 28]';

>> inv(A)*B

     ans =

     2.2500

     -1.0000

     -0.2500
```

Koeficienty ve jmenovatelích parciálních zlomků:

$$A = 2.25;$$
$$B = -1;$$
$$C = -0.25.$$

2) Výpočet dosazováním

$$G(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+5}$$
$$= \frac{A(s+3)(s+5) + B(s+1)(s+5) + C(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)(s+5)}.$$

$$A(s+3)(s+5) + B(s+1)(s+5) + C(s+1)(s+3) = s^2 + 11s + 28.$$

<u>s = -1</u>

$$A \cdot 2 \cdot 4 = (-1)^2 + 11 \cdot (-1) + 28.$$

$$A \cdot 8 = 18; \quad A = 2.25.$$

<u>s = -3</u>

$$B \cdot (-2) \cdot 2 = (-3)^2 + 11 \cdot (-3) + 28.$$

$$(-4) \cdot B = 4; \quad B = -1.$$

<u>s = -5</u>

$$C \cdot (-4) \cdot (-2) = (-5)^2 + 11 \cdot (-5) + 28.$$

$$8 \cdot C = -2; \quad C = -0.25.$$

Koeficienty ve jmenovatelích parciálních zlomků (samozřejmě jsou stejné jako u předchozí metody):

$$A = 2.25;$$
$$B = -1;$$
$$C = -0.25.$$

3) Metoda přímého hledání

$$G(s) = \frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+5}.$$

$$A = \lim_{s \to -1} \left(G(s) \cdot (s+1)\right) = \lim_{s \to -1} \left(\frac{s^2 + 11s + 28}{(s+3)(s+5)}\right) = \frac{18}{8}.$$

$$B = \lim_{s \to -3} \left(G(s) \cdot (s+3)\right) = \lim_{s \to -3} \left(\frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+5)}\right) = \frac{4}{-4}.$$

$$C = \lim_{s \to -5} \left(G(s) \cdot (s+5)\right) = \lim_{s \to -5} \left(\frac{s^2 + 11s + 28}{(s+1)(s+3)}\right) = \frac{-2}{8}.$$

Koeficienty ve jmenovatelích parciálních zlomků (opět stejné):

$$A = 2.25;$$
$$B = -1;$$
$$C = -0.25.$$

Ověření výsledků v MATLABu (pomocí funkce *residue()*):

```
>> b = [1 11 28]; %polynom v citateli

>> a = [1 9 23 15]; %polynom ve jmenovateli

>> [R,P,K] = residue(b,a)

     R =

          -0.2500

          -1.0000

          2.2500

     P =
```

```
        -5.000

        -3.000

        -1.000

 K =

        []
```

Poznámka: koeficienty, které jsme získali z funkce residue() (jsou hodnotami vektoru R) jsou v jiném pořadí, než jsme to měli ve výpočtech. Dávejte pozor na to, kterému kořenu (jsou hodnotami vektoru P) odpovídá který koeficient.

Konečně dosadíme zjištěné koeficienty do čitatelů příslušných zlomků:

$$G(s) = \frac{2.25}{s+1} + \frac{-1}{s+3} + \frac{-0.25}{s+5}.$$

Teď už můžeme najít originál funkce G(s), neboli naši impulzní funkci:

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = 2.25 \cdot e^{-t} - e^{-3t} - 0.25 \cdot e^{-5t}.$$

Jiný způsob, jak zjistit impulzní funkci je derivace přechodové funkce:

$$g(t) = h'(t) = (1.8667 - 2.25 \cdot e^{-t} + 0.3333 \cdot e^{-3t} + 0.05 \cdot e^{-5t})'$$
$$= 2.25 \cdot e^{-t} - 0.9999 \cdot e^{-3t} - 0.25 \cdot e^{-5t}.$$

Výsledek je stejný (až na zaokrouhlovací chyby)

MATLAB

V MATLABu se můžeme podívat na přechodovou a impulzní charakteristiky pomocí funkcí *step()* a *impulse()*. K definici obrazového přenosu se používá funkce *tf()*.

```
>> b = [1 11 28]; %polynom v citateli

>> a = [1 9 23 15]; %polynom ve jmenovateli
```

```
>> sys = tf(b,a); %obrazovy prenos

>> step(sys) %prechodova charakteristika

>> impulse(sys) %impulzni charakteristika
```

Pokud byste chtěli pomocí MATLABu ověřit výsledky výpočtu impulzní a přechodové funkce pro libovolný dynamický systém, můžete použít uvedený program. Měli byste u tohoto programu upravit (pro jiný dynamický systém) polynomy pro čitatel a jmenovatel obrazového přenosu, čas (odhadem) a spočítanou přechodovou a impulzní funkci.

```
close all %zavrit vsechna otevrena okna
clear all %smazat vsechny promenne ve Workspace'u
clc %vycistit obsah obrazovky

%polynom v citateli obrazoveho prenosu
b = [1 11 28];
%polynom ve jmenovateli obrazoveho prenosu
a = [1 9 23 15];

%obrazovy prenos
sys = tf(b,a)

%k tomu, abychom nakreslili prechodovou a impulzni
%charakteristiku, musime si nejdriv nadefinovat casovy vektor
%t. Jsou to body, ve kterých se budou pocitat hodnoty
%charakteristik. T je hodnota posledniho bodu

T = 15;

t = 0:0.1:T; %hodnoty casoveho vektoru jsou 0,0.1,0.2,...,T
n = length(t); %n je rozmer casoveho vektoru
```

```
%impulzni funkce
g = 2.25*exp(-t) - exp(-3*t) - 0.25*exp(-5*t);
%prechodova funkce
h = 1.8667 - 2.25*exp(-t) + 0.3333*exp(-3*t) + 0.05*exp(-5*t);

figure; %zobrazit graf
plot(t,h);  %zobrazit spocitanou prechodovou charakteristiku
hold on;    %abychom mohli pridat dalsi graf
step(sys);  %zobrazit prechodovou charakteristiku, kterou si
spocital Matlab

figure; %zobrazit dalsi graf
plot(t,g);  %zobrazit spocitanou impulzni charakteristiku
hold on; %abychom mohli pridat dalsi graf
impulse(sys);%zobrazit impulzni charakteristiku, kterou si
spocital Matlab

%vysledne grafy samozrejme museji byt stejne
```

PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

(spočítejte přechodovou a impulzní funkci systému popsaného pomocí obrazového přenosu)

Příklad 11

$$G(s) = \frac{0.5s + 0.2}{(s + 0.1)(s + 1)(s + 0.5)}.$$

Výsledek:

$$h(t) = 4 - 4.17 \cdot e^{-0.1t} + 0.67 \cdot e^{-t} - 0.5 \cdot e^{-0.5t}.$$

$$g(t) = 0.42 \cdot e^{-0.1t} - 0.67 \cdot e^{-t} + 0.25 \cdot e^{-0.5t}.$$

Příklad 12

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2.5s + 1}.$$

Výsledek:

$$h(t) = 4 - 5.33 \cdot e^{-0.5t} + 1.33 \cdot e^{-2t}.$$

$$g(t) = 2.67 \cdot e^{-0.5t} - 2.67 \cdot e^{-2t}.$$

Příklad 13

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 4}{(s + 0.2)(s + 2)(s + 1)}.$$

Výsledek:

$$h(t) = 10 - 9.86 \cdot e^{-0.2t} + 1.11 \cdot e^{-2t} - 1.25 \cdot e^{-t}.$$

$$g(t) = 1.97 \cdot e^{-0.2t} - 2.22 \cdot e^{-2t} + 1.25 \cdot e^{-t}.$$